

TRIGONOMETRIÆ

Planæ & Sphæricæ

E L E M E N T A.

I T E M

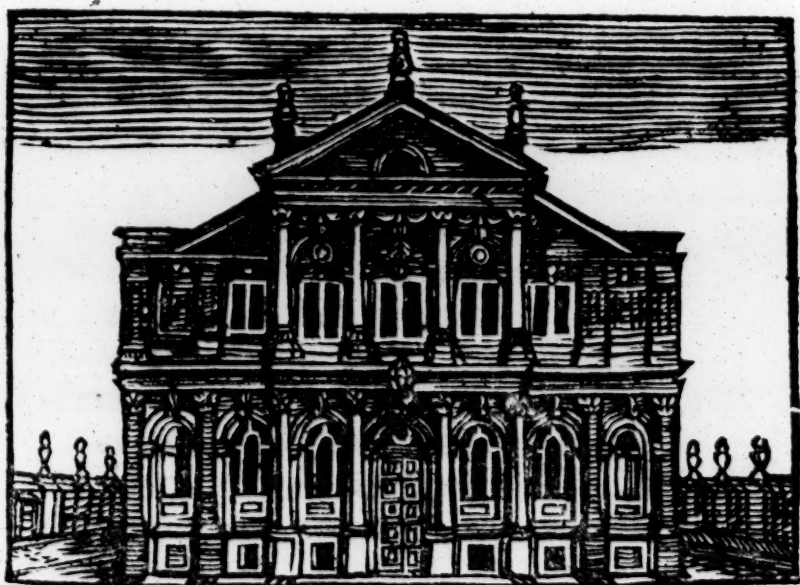
D E N A T U R A

E T

A R I T H M E T I C A

L O G A R I T H M O R U M

T R A C T A T U S B R E V I S.



O X O N I Æ,

E T H E A T R O S H E L D O N I A N O M D C C X X I I I .

Impensis Ric. Clements Bibliop. Oxoniensis.

ALGONOMETRIE

Spec. & Sphærica

A. L. M. R. N. A.

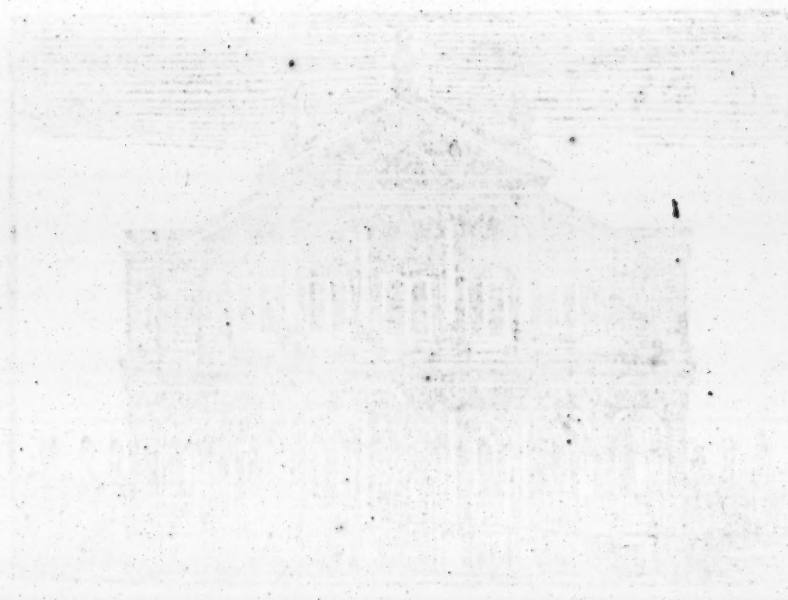
ITEM

D. I. N. A. T. U. R. A.

A. R. A. T. H. M. E. T. I. C. A.

M. U. S. I. C. A. R. U. M.

T. R. A. T. U. S. S. T. A. T. I. S.



A. L. M. R. N. A.

THEATRO S. M. A. R. I. A. E.

T
H
E
F
celle
the
parte
Ph
circu
& un
lingu
in 60
lus q
funt
Q
sexag
non
care;
circu
fura
100
Co
Ch
mino

TRIGONOMETRIÆ

Planæ & Sphæricæ

E L E M E N T A.

DEFINITIONES.

EX datis Trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera laterumve rationes, & mixtim assequi, Trigonometriæ munus est. Ad quod præstandum, necesse est, ut non tantum Peripheriæ circulares, sed & rectæ lineæ circulis adscriptæ, in notas aliquot & certas partes secari supponantur.

Placuit itaque Veteribus Mathematicis, peripheriam circuli in 360 partes (quos gradus appellant) dividere; & unumquemque gradum in 60 minuta prima, & hæc singula in 60 secunda, & rursus horum unumquodque in 60 minuta Tertia, & ita continuo partiri. Et angulus quilibet dicitur esse tot graduum & minutorum, quot sunt in arcu qui angulum illum metitur.

Quidam gradum in partes centesimas, potius quam sexagesimas partiri volunt: & utilius fortasse esset, non gradus sed & ipsum circulum in decupla ratione secare; quæ divisio forsan aliquando obtinebit. Verum si circulus constet 360 gradibus, ejus quadrans quæ est mensura anguli recti, erit harum partium 90. Si circulus in 100 partes secetur, Quadrans erit 25 partim.

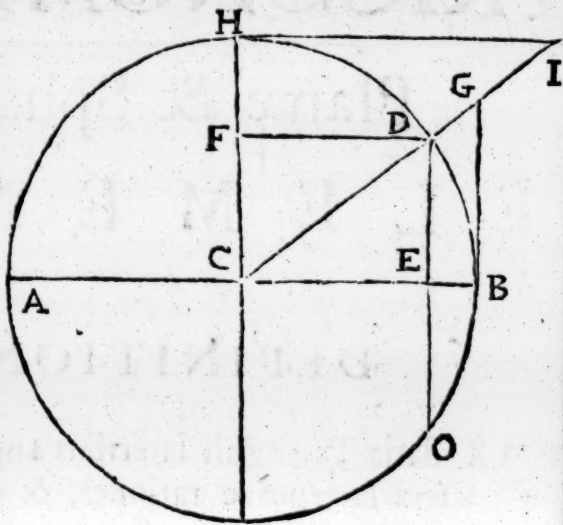
Complementum Arcus, est differentia ejus à Quadrante.

Chorda sive *subtensa* est recta linea ab uno Arcûs termino ad alterum ducta.

4 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

Sinus rectus alicujus arcus qui & simpliciter sinus. dici solet, est perpendicularis cadens ab uno arcus termino ad radium per alterum terminum ejusdem Arcus ductum. Est igitur semisubtensa dupli Arcus; scil. est $DE = \frac{1}{2} DO$ & est arcus DO duplus ipsius DB .

Hinc sinus arcus 30. gr. æqualis est dimidio radii, nam per 15 El. 4. Latus Hexagoni circulo inscripti, hoc est, subtensa 60 gr. æqualis est radio. Sinus dividit Radium in duo segmenta CE EB ; quorum unum CE



quod centro & sinu recto intercipitur, est sinus complementi arcus DB ad quadrantem (nam est $CE = FD$ qui est sinus arcus DH) & vocatur *cosinus*. Alterum segmentum BE quod sinu recto & peripheria intercipitur, vocatur *sinus versus*: aliquando dicitur Arcus *sagitta*.

Quod si per unum Arcus terminum D producaturs a centro recta CG , donec occurrat rectæ BG super diametro ad ejus terminum B perpendiculari; vocabitur in Trigonometria CG *Secans*, & BG *Tangens* arcus DB .

Cofecans & *Cotangens* Arcus est secans vel tangens Arcus, qui est complementum alterius ad Quadrantem. *Nota*. Sicut eadem est Chorda Arcus & ejusdem complementi ad semicirculum. Sic idem est sinus, eadem Tangens, eademque secans Arcus & ejusdem complementi ad semicirculum.

Sinus Totus est sinus maximus, seu sinus 90 graduum qui circuli radio æqualis est.

Canon Trigonometricus est Tabula, quæ à minuto incipiens, seriatim exhibet quas habent longitudines singuli sinus Tangentes & Secantes, respectu radii, qui unitatis loco

loco ponitur, & in partes 10 000 000 vel plures decimales dividi intelligitur. Adeo ut ope hujus Tabulæ, cujuslibet Arcûs vel anguli sinus Tangens vel secans haberi potest; Et vicissim ex dato sinu Tangente vel secante dabitur qui iis respondet arcus vel angulus. Observandum est in sequentibus R esse notam Radii, S notam sinus, coS cosinus, T notam Tangentis, & coT coTangentis.

CONSTRUCTIO CANONIS.

PROP. I. THEOREMA.

Datis duobus quibuscumque Trianguli rectanguli lateribus, reliquum quoque dabitur.

Vide figuram propositionis tertiæ.

Est enim per 47 Elementi primi $ACq = ABq + BCq$ & $ACq - BCq = ABq$, & vicissim $ACq - ABq = BCq$. unde per extractionem Radicis quadratæ, dabitur $AC = \sqrt{ABq + BCq}$ & $AB = \sqrt{ACq - BCq}$. & $BC = \sqrt{ACq - ABq}$.

PROP. II. PROBL.

Dato DE sinu arcus DB. Invenire Cosinum DF.

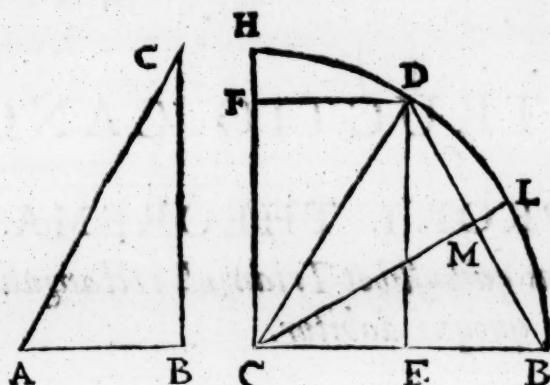
Ex datis CD radio & DE sinu, in Triangulo rectangulo CDE dabitur per præcedentem $CE = \sqrt{CDq - DEq} = DF$.

6 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PROP. III. PROBL.

Dato DE sinu arcus cujuscvis DB. Invenire DM vel BM sinum arcus dimidii.

Dato DE dabitur per præcedentem CE, ac proinde EB quæ est differentia inter cosinum & Radium. In Tri-



angulo igitur rectangulo DBE datis DE & EB dabitur DB cujus semissis DM est sinus arcus $DL = \frac{1}{2}$ arcus DB.

PROP. IV. PROBL.

Dato BM sinu arcus BL invenire sinum dupli Arcus.

Dato BM sinu, dabitur per Prop. 2. cosinus CM. Sunt autem Triangula CBM DBE æquiangula, ob angulos ad E & M rectos & angulum ad B communem, quare (per 4. 6.) erit $CB : CM :: BD$ vel $2 BM : DE$. Unde cum dantur tres priores hujus Analogiæ termini, quartus quoque qui est sinus arcus DB innotescet.

Corol. Est $CB : 2 CM :: BD : 2 DE$, hoc est, Radius ad duplum cosinus arcus $\frac{1}{2}$ DB ut subtensa arcus DB ad subtensam dupli arcus. Item est $CB : 2 CM :: (2 BM : 2 DE ::) BM : DE :: \frac{1}{2} CB : CM$. unde dato sinu arcus alicujus & sinu arcus dupli, dabitur cosinus arcus simpli.

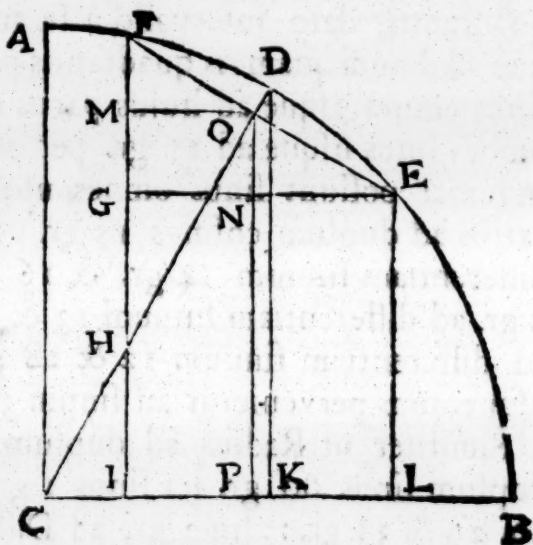
PROP.

PROP. V.

Datis sinibus duorum arcuum BD FD, Invenire FI sinum summæ arcuum, Item EL sinum differentie eorundem.

Ducatur Radius CD, & sit CO cosinus arcus FD, qui proinde dabitur. per O agatur OP parallela ad DK. Item ducantur OM GE parallelæ ad CB. Et ob æquiangu-
la triangula CDK COP CHI FOH FOM. Est pri-
mò $CD:DK::CO$.

OP, quæ itaque inno-
tescet. Item est $CD:$
 $CK::FO:FM$, a-
deoque & illa nota e-
rit. sed ob $FO=EO$
erit $FM=MG=$
 ON . Est itaque OP
 $+FM=FI$ sinui
summæ arcuum: & OP
 $-FM$, hoc est, OP
 $-ON=EL$ sinui
differentiæ arcuum. Q.
E. I.



Coroll. Quia arcuum BE BD BF differentie sunt æ-
quales, Erit BD arcus medius arithmeticus inter arcus
BE BF.

PROP. VI.

*Isdem positis, Radius est ad duplum cosinus arcus me-
dii, ut sinus differentie ad differentiam sinuum extre-
morum.*

Nam est $CD:CK::FO:FM$, unde duplicando con-
sequentes $CD:2CK::FO.2FM$ vel ad FG; quæ est
differentia sinuum EL FI. Q. E. D.

Cor. I. Si arcus BD sit 60 grad. Erit differentia sinu-
um FI FL æqualis FO sinui distantie. Nam in eo casu
sit CK sinus 30 grad. cujus duplum æquale est radio,

8 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

adeoque ob $CD = 2CK$ erit $FO = FG$. Adeoque si duo arcus BE BF ab arcu 90 gr. æquidistant, erit differentia sinuum æqualis sinui distantiae FD .

Cor. 2. Hinc si dentur sinus omnium arcuum, dato intervallo à se invicem distantium ab initio quadrantis usque ad 60 gradus, facile inveniuntur reliqui per unicam additionem. Est enim sinus 61 gr. = sinui 59 gr. + sin 1 gr. & sinus 62 gr. = sinui 58 gr. + sin 2 gr. Item sinus 63 gr. = sinui 57 gr. + sin 3 gr. & ita deinceps.

Cor. 3. Si habeantur sinus omnium arcuum ab initio quadrantis, dato intervallo à se invicem distantium, usque ad datum quamvis quadrantis partem, dabuntur exinde sinus omnes usque ad hujus partis duplum. *ex. g.* Dentur omnes sinus usque ad 15 gr. per præcedentem Analogiam inveniri possunt sinus omnes usque ad 30 gr. Nam est ratiùs ad duplum cosinus 15 gr. ut sinus unius gradus ad differentiam sinuum 14 gr. & 16 gr. ita etiam est sinus 2 gr. ad differentiam sinuum 13 & 17 gr. & ita sinus 3 gr. ad differentiam sinuum 12 & 18 gr. atque sic continuo usque dum pervenietur ad sinum 30 gr.

Similiter ut Radius ad duplum cosinus 30 gr. seu ad duplum sinus 60 gr. ita sinus 1 gr. ad differentiam sinuum 29 & 31 gr. :: sin 2 gr. ad Differentiam sinuum 28 & 32 gr. :: sin 3 gr. ad differentiam sinuum 27 & 33 gr. sed in hoc casu est Radius ad duplum cosinus 30 gr. ut 1 ad $\sqrt{3}$. ac proinde si multiplicentur sinus distantiarum ab arcu 30 gr. per $\sqrt{3}$ dabuntur differentiae sinuum.

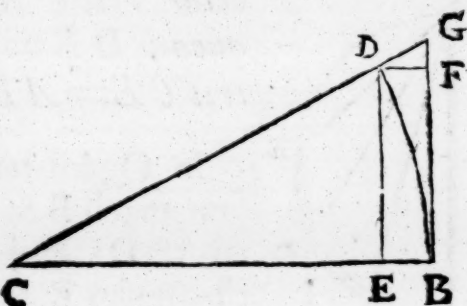
Similiter in ipso initio quadrantis minutim exquirere possumus sinus, datis sinibus & cosinibus unius & duorum minutorum. Nam ut Radius ad duplum cosinus $2'$:: sin $1'$: differentiam sinuum $1'$ & $3'$: Sin $2'$: differentiam sinuum $0'$ & $4'$ hoc est, ad ipsum sinum $4'$. Et similiter ex datis sinibus priorum $4'$ inveniuntur sinus reliqui usque ad $8'$ & exinde ad $16'$ & ita deinceps.

PROP.

PROP. VII. THEOREMA.

In arcubus exiguis sinus & Tangens ejusdem arcus sunt quam proxime ad se invicem, in ratione æqualitatis.

Nam ob æquiangula triangula CED CBG, erit CE: CB:: ED: BG. sed accedente puncto D ad B, evanescit EB respectu arcus BD: unde fit CE fere æqualis CB. adeoque & ED fere æqualis BG. Si EB sit minor radii parte $\frac{1}{10\ 000\ 000}$ erit differentia inter sinum & tangen-



tem, minor quoque tangens parte $\frac{1}{10\ 000\ 000}$.

Cor. Cum Arcus sit tangente minor, sinu autem suo major; & exigui arcus sinus & tangens sunt fere æquales, erit etiam arcus suo sinui vel tangenti fere æqualis, Adeoque in exiguis arcubus, erit ut arcus ad arcum ita sinus ad sinum.

PROP. VIII.

Invenire sinum Arcus unius minuti.

Latus Hexagoni circulo inscripti, hoc est, subtenſa 60 graduum æqualis est Radio, (per 15^{tam} 4^{ti}.) Radii itaque ſemiffis erit ſinus Arcus 30 gr. Dato itaque ſinu Arcus 30 grad. invenitur ſinus arcus 15 gr., (per 3^{tiam} hujus.) Item ex dato ſinu 15 gr. per eandem invenitur ſinus 7 gr. 30 min. & ſinus hujus dimidii 3 gr. 45' ſimiliter invenitur; & ita deinceps, donec duodecima peracta biſeſſione, perveniatur ad arcum 52" 44" 3" 45" cujus coſinus fere æqualis eſt radio, in quo caſu (uti conſtat ex prop. 7.) ſunt ſinus arcubus ſuis proportionales; adeoque ut arcus 52" 44" 3" 45" ad arcum unius minuti ita erit

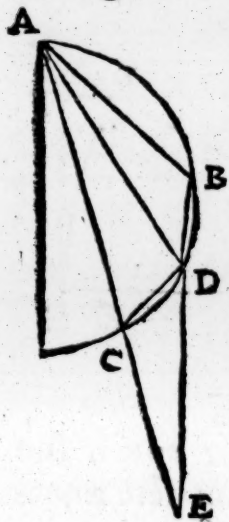
IO TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

erit sinus prius inventus ad sinum arcus unius minuti, qui igitur dabitur.

Dato sinu unius minuti, invenietur per prop. 2 & 4, sinus duorum minutorum ejusque cosinus.

PROP. IX THEOREMA.

Si angulus BAC in peripheria circuli existens, bisectur rectâ AD, Et producatr AC quoad DE = AD ipsi occurrat in E: erit CE = AB.



In Quadrilatero ABCD (per 22. 3.) sunt anguli B & ACD æquales duobus rectis = DCE + DCA (per 13. 1.) unde erit angulus B = DCE. Quin etiam est angulus E = DAC (per 5. 1.) = DAB & est DC = DB. quare Triangula BAD & CED sunt congrua & CE est æqualis AB. Q. E. D.

PROP. X THEOREMA.

Sint arcus AB BC CD DE EF &c. æquales; Arcuumque AB AC AD AE &c. subtensæ ducantur, erit AB:AC::AC:AB+AD::AD:AC+AE::AE:AD+AF:AF:AE+AG.

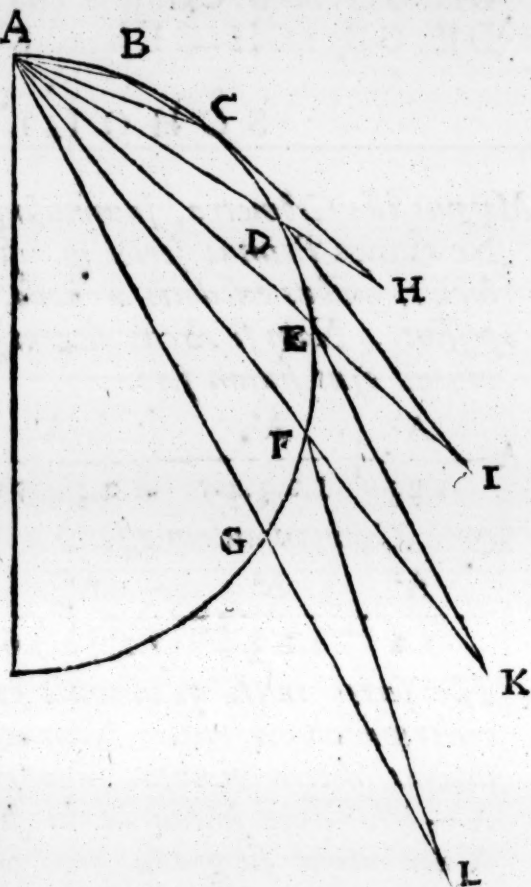
Producantur AD in H, AE in I, AF in K, & AG in L, ut triangula ACH ADI AEK AFL sint Isoscelia. Et quoniam angulus BAD bisectus est, fiet DH = AB per precedentem. Similiter erit EI = AC, FK = AD, item GL = AE.

Sed Triangula Isoscelia ABC CAH DAI EAK FAL, ob angulos ad bases æquales, sunt æquiangulara. Quare erit ut AB:AC::AC:AH = AB+AD::AD:AI = AC+AE::AE:AK = AD+AF::AF:AL = AE+AG. Q. E. D.

Corol.

Corol. Quoniam est AB ad AC ut Radius ad duplum
 cosinus Arcus $\frac{1}{2}$ AB, (per corol. prop. 4.) erit quo-
 que ut Radius ad du-
 plum cosinus arcus $\frac{1}{2}$ A

B ita $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ AC
 : $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ AB +
 AD : $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ AC +
 AE : $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ AD +
 AF &c. Sint jam ar-
 cus AB BC CD &c.
 singuli 2'. Erit $\frac{1}{2}$ AB
 sinus unius minuti, $\frac{1}{2}$
 AC sinus 2'. $\frac{1}{2}$ AD si-
 nus 3' $\frac{1}{2}$ AF sinus 4'
 &c. Unde datis sinu-
 bus unius & duorum
 minutorum sinus om-
 nes reliqui sic facilli-
 me habentur.



Dicatur cosinus ar-
 cus unius minuti, hoc
 est, sinus arcus 89 gr.
 9' Q & fient sequen-
 tes Analogiæ, R : 2 Q

sin 2' : S 1' + S 3'. quare dabitur sinus 3'. Item R :
 Q :: S. 3' : S. 2' + S. 4'. quare dabitur S 4'.

Item R : 2 Q :: S. 4' : S. 3' + S. 5'. quare habetur si-
 nus 5'.

R : 2 Q :: S. 5' : S 4' + S 6' proinde dabitur S 6'. At-
 que ita deinceps ad singula quadrantis minuta dabun-
 tur sinus. Et quoniam Radius seu primus Analogiæ ter-
 minus est Unitas; operationes per multiplicationem con-
 tractam & subductionem facillime expediuntur.

Inventis sinubus, usque ad gradum sexagesimum. Re-
 liqui sinus per solam additionem habentur (per cor. 2. pr. 6.)

Datis sinubus, Tangentes & secantes ex Analogiis se-
 quentibus inveniri possunt. (In fig. Definitionum) ob æ-
 quiangula Triangula CED CBG CHI.

CE:

12 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

CE:ED::CB:BG. hoc est, coS:S::R:T.
 GB:BC::CH:HI. h. e. T:R::R:coT.
 CE:CD::CB:CG. h. e. coS:R::R:Secant.
 DE:CD::CH:CI. h. e. S:R::R:co Secant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, summusque Philosophus Dominus Newtonus Primus series in infinitam convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum sinus computari possint. Nam si Arcus dicatur A & Radius sit unitas invenit ejus sinum fore.

$$A - \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \&c.$$

Cosinum autem esse

$$1 - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \&c.$$

Hæ series initio quadrantis cum Arcus A parvus est celerrime convergunt. Nam in serie pro sinu, si A non superet decem minuta, duo primi ejus termini scil. $A - \frac{1}{6} A^3$ dant sinum ad 15 figurarum loca, si Arcus A non major sit gradu, tres primi exhibent sinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis sinibus hæ series sunt admodum utiles. sed quo major sit arcus A, eo pluribus opus est terminis ut inveniat sinum in numeris qui sunt veri ad datum figurarum locum. Tandem autem lentissime convergunt series cum Arcus fere æqualis est Radio. Cui rei ut remedium adferatur, ego alias excogitavi series Newtonianis similes, in quibus suppono arcum cujus sinus quaeritur esse summam vel differentiam duorum arcuum scil. esse $A + z$ vel $A - z$: notosque esse sinum & cosinum arcus A. scil. sit a sinus arcus A & b ejus cosinus. Sinus Arcus $A + z$ per hanc seriem exprimetur

$$1 + \frac{a z}{1} - \frac{a z^2}{1.2} - \frac{b z^3}{1.2.3} + \frac{a z^4}{1.2.3.4} + \frac{b z^5}{1.2.3.4.5} \&c.$$

Ejus

2. *Ejus Cofinus* $b - \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} + \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5} - \frac{bz^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Similiter sinus Arcus A — z est

3. $a - \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} + \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} - \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Et cofinus est

4. $b + \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} - \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{az^5}{1.2.3.4.5} \&c.$

Arcus A est medius Arithmeticus inter arcus A — z & A + z. Differentiæ sinuum sunt

5. $\frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

6. $\frac{bz}{1} + \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} - \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} + \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Unde differentiarum differentia seu differentia secunda

7. *Prodit* $\frac{2az^2}{1.2} - \frac{2az^4}{1.2.3.4} + \frac{2az^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Seu $\frac{2axz^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} \&c.$

Quæ series æqualis est duplo sinus arcus medii ducto in sinum versum arcus z & celerrime convergit. Adeo ut si z sit minutum primum, terminus seriei primus dat differentiam secundam ad 15 figurarum loca; secundus autem terminus ad 25 loca.

Hinc datis sinibus duorum quorumvis arcuum intervallo minuti distantium, facili admodum operatione inveniri possint sinus reliquorum omnium arcuum qui sunt in eadem progressionē.

In

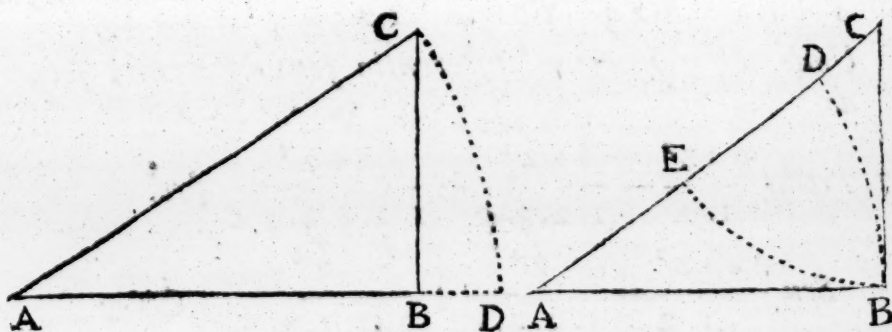
In serie prima & secunda si Arcus A sit $= 0$, erit $a = 0$ & b ejus cosinus sit radius seu 1. & hinc destructis terminis ubi est a & pro b posito 1 series deveniunt Newtonianæ. In serie tertia & quarta. si A sit 90 gr. fiet $b = 0$ & $a = 1$ unde quoque destructis terminis ubi est b & pro a posito 1 rursus prodibunt series Newtonianæ.

Omnes hæc series ex Newtonianis facile fluunt per prop. 5. hujus.

PROP. XI.

In Triangulo Rectangulo, si Hypotenusa sit Radius, latera sunt sinus angulorum oppositorum; si vero crus alterum fiat Radius, crus reliquum est Tangens anguli oppositi, & Hypotenusa est anguli secans.

Manifestum est CB esse sinum arcus CD , ejusque cosinum esse AB , sed arcus CD est mensura anguli A , & complementum mensuræ anguli C . Præterea in secunda figura posito AB radio, est BC , Tangens & AC secans ar-



cus BD , qui est mensura anguli A , & similiter in eadem figura posito BC radio, est BA Tangens & AC secans arcus BE vel anguli C . Q. E. D.

Est igitur, ut AC secundum datam quamvis mensuram æstimata ad BC in eadem mensura æstimatam, ita erit 10000000 numerus partium in quas dividi supponitur Radius, ad numerum qui exprimit in iisdem partibus longitudinem quam habet sinus anguli A , hoc est,

Erit

Erit $AC : BC :: R : S, A$

Simili ratione erit $AC : BA :: R : S, C$

Item $AB : BC :: R : T, A$

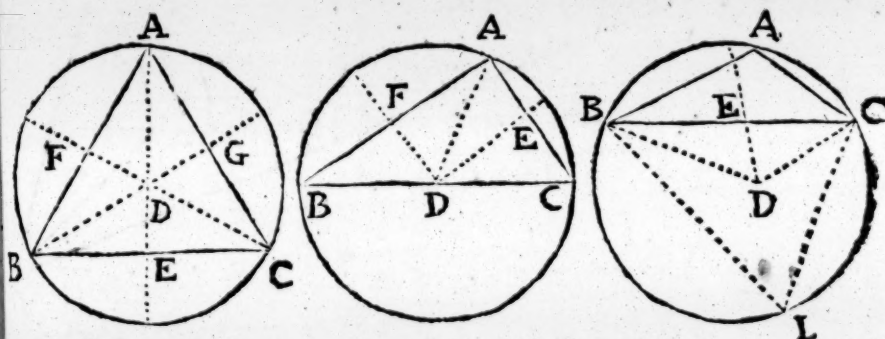
Et $BC : BA :: R : T, C$

In his itaque proportionalibus si dantur tres quælibet, per Regulam Trium invenietur quarta.

PROP. XII.

Trianguli plani latera sunt ut sinus angulorum oppositorum.

Trianguli circulo inscripti latera perpendicularibus radiis bisecentur. Et erunt semilatera sinus angulorum ad peripheriam. Est enim angulus BDC ad centrum du-



plex anguli BAC ad peripheriam (per 20. El. 3.) cujus itaque dimidium sc. BDE æquale est BAC , atque ejus sinus est BE . Eadem ratione erit BF sinus anguli BCA . Et AG erit sinus anguli ABC .

In Triangulo rectangulo est $BD = \frac{1}{2} BC = \text{Radius}$ (per 31. El. 3.) sed Radius est sinus anguli recti unde $\frac{1}{2} BC$ est sinus anguli A .

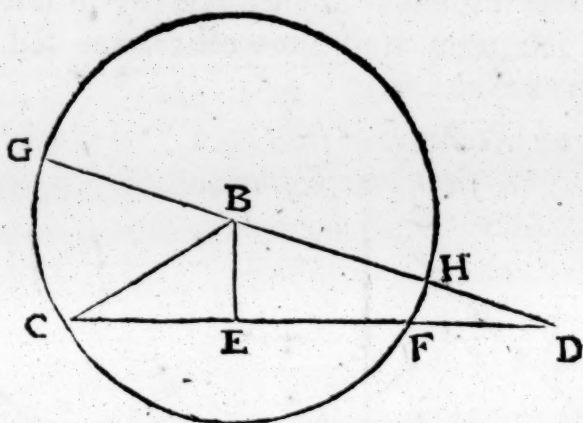
In Triangulo Amblygonio, ductis BL CL , erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (per 22. El. 3.) ac proinde idem erit utriusque anguli sinus. Est autem BDE (cujus sinus est BE) = angulo L . quare erit & BE sinus anguli BAC . Sunt itaque in omni triangulo semisses laterum sinus angulorum oppositorum, manifestum autem est latera esse inter se ut ipsorum semisses. Q. E. D.

PROP.

ru-
3
io-
afis
H
ru-

10-

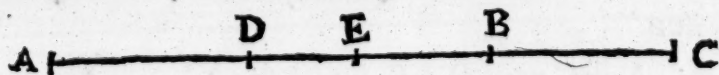
afis
H
ru



pe
nma
radi
fiat
) an
tiac
diff
n f
I
3 I
G.
D
H
C
m
mn
ort

diff

I
BI
G.
D
H
C
m
mm
or



Si ad semisummam addatur semidifferentia, aggregatum erit æquale majori; si autem à semisummâ subducatur semidifferentia, residuum erit æquale minori. Sint enim AB BC duæ quantitates; & capiatur $AD = BC$. Fiet DB differentia. Quarum summa est AC , quæ bisecta in B E dat

18 TRIGONOMETRIÆ PLANE

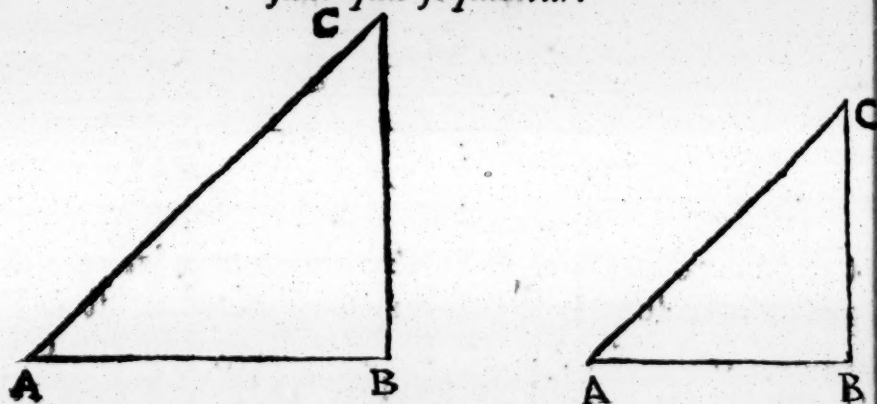
E dat AE vel EC semisummam & DE vel EB semidifferentiam. Porro est $AB = AE + EB = \text{semisummæ} + \text{semidifferentia}$, & $BC = CE - EB = \text{semisummæ} - \text{semidifferentia}$.

IN quovis Triangulo plano datis duobus angulis, datur tertius qui est summæ duorum reliquorum complementum ad duos rectos.

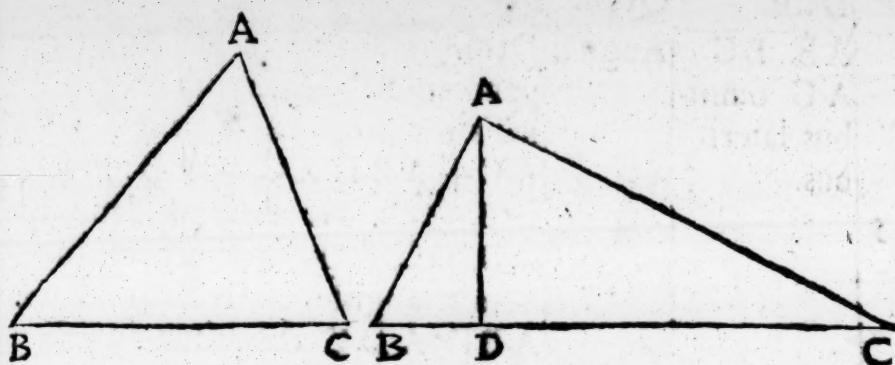
In Triangulo autem rectangulo dato alterutro angulo acuto, datur reliquus, qui est dati complementum ad rectum.

Datis autem duobus trianguli rectanguli lateribus, ut inveniatur reliquum non opus est canone sed perficitur ope prop. primæ hujus.

Trianguli Rectanguli solutiones Trigonometricæ sunt quæ sequuntur.



	Datis.	Quær.	Fiat.
1	AB BC cruribus.	Anguli	$AB:BC::R:T$ anguli A. Cujus complementum est Angulus C.
2	AB AC crure & Hypoten.	Anguli	$AC:AB::R:S$, C cujus complementum est angulus A.
3	AB & A crure & angulo.	BC crus alterum	$R:T, A::AB:BC$.
4	AB & C crure & angulo.	ACHy-potenu-sa.	$S, C:R::AB:AC$.

*In Triangulis obliquangulis.*

	Datis.	Quær.	Fiat.
1	A. B. C & A B angulis & latere.	BC & A C latera.	S, C: S, A:: AB: BC. Item S, C: S, B:: AB: AC; datis duobus angulis datur tertius, unde casus cum dentur duo anguli & latus; reliqua quærantur, recidit in hunc casum.
2	A. B. C. omnibus angulis.	AB. AC. BC omnia latera.	S, C: S, A:: AB: BC. Et S, C: S, B:: AB: AC. unde datis angulis invenire licet proportionem laterum, at non ipsa latera, nisi ipsorum unum prius innotescat.
3	AB: BC, & C A & B duobus lateribus & angulo uni opposito.	CA & B anguli.	AB: BC: S, C: S, A, qui proinde inveniatur. Sed quia idem est sinus anguli & ejus complementi ad duos rectos, prænotanda est anguli A Species.
4	AB BC & B. lateribus duobus & angulo interjecto.	Anguli. A & C.	$\frac{BC + AB}{2} : \frac{BC - AB}{2} :: \frac{BC + AC}{2} : \frac{BC - AC}{2}$ unde datur differentia angulorum A & C quorum summa quoque est nota; & proinde per <i>Problema post prop. 14.</i> dabuntur ipsi anguli.

20 TRIGONOMETRIÆ PLANÆ, &c.

Datis.	Quær.	Fiat.
AB. BC AC omni- bus lateri- bus.	Anguli	Demisso à vertice in Basim per- pendiculo. Quærantur segmenta basis per prop. 14. Fiat scil. $BC : AC + AB :: AC - AB : DC - DB$, & ex hac analogia dabuntur BD. DC. & proinde per resolutio- nem triangulorum rectangulorum ABD ADC dabuntur anguli.

91.

TRIGO-

I.
sup
circ
3
fit
cen
4
arcu
5
con
qui
rum

TRIGONOMETRIÆ

Sphæricæ

E L E M E N T A.

DEFINITIONES.

1. **S**phæræ Poli, sunt duo puncta in superficie Sphæricæ, quæ sunt Axis extrema.

2. Polus circuli in Sphæra, est punctum in superficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes, sunt inter se æquales.

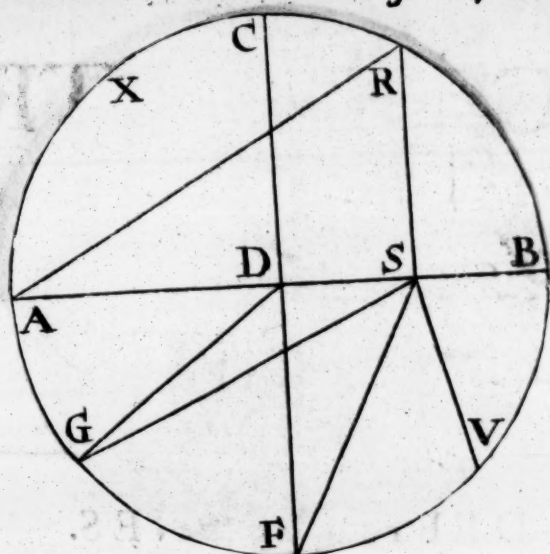
3. Circulus in sphæra maximus est, cujus planum transit per sphæræ centrum, & cujus centrum idem est cum centro Sphæræ.

4. Triangulum Sphæricum est figura comprehensa sub arcibus trium maximorum in Sphæra circulorum.

5. Angulus Sphæricus est is qui in superficie sphæricæ, continetur sub duobus arcibus maximorum circulorum; qui æqualis est inclinationi planorum istorum circulorum.

PROP. I.

Circuli maximi ACB AFB se bifariam secant.



Cum enim circuli habent idem centrum, communis eorum sectio erit utriusque circuli diameter, quæ eos bifariam secabit.

Cor. Hinc in superficie sphæræ, duo maximorum circulorum Arcus semicirculis minores, spatium non comprehendunt, non enim possunt, nisi in duobus punctis semicirculo oppositis, sibi invicem occurrere.

PROP. II.

Si à polo C circuli cujuscvis AFB, ducatur ad ejus centrum recta CD, ea ad planum istius circuli perpendicularis erit.

In circulo AFB ducantur diametri quævis EF GH; Et quoniam in triangulis CDF CDE, sunt CD DF æquales CD DE, & basis CF æqualis basi CE (per def. 2.) erit (per 8. El. 1.) angulus CDF = angulo CDE; ac proinde uterque rectus erit, similiter demonstrabitur, angulos

angulos CDG CDH esse rectos; unde (per 4. El. II.) erit CD perpendicularis ad planum circuli $A F E$. Q.E.D.

Cor. 1. Circulus maximus distat à polo suo intervallo Quadrantis; nam ob angulos CDG $CD F$ rectos, erunt ipsorum mensuræ, sc. arcus CG CF quadrantes.

Cor. 2. Circuli maximi per polum alterius circuli transeuntes cum ipso faciunt angulos rectos; & vicissim, si cum altero circulo faciunt angulos rectos; transibunt per polum alterius istius circuli; nam per rectam DC eos transire necesse est.

P R O P. III.

Si polo A describatur maximus circulus $E C F$, arcus CF interceptus inter AC AF , est mensura anguli CAF vel CDF .

Per *corol. 1.* præcedentis, sunt arcus AC AF quadrantes, ac proinde anguli ADC ADF sunt recti, quare (per defin. 6. El. II.) angulus CDF (cujus mensura est arcus CF) æqualis est inclinationi planorum ACB AFB , æqualis quoque angulo Sphærico CAF vel CBF . Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus AC AF sunt Quadrantes, erit A polus circuli per puncta C & F transeuntis, est enim AD ad planum FDC normalis, (per 4. El. II.)

Cor. 2. Anguli ad verticem sunt æquales, uterque enim est æqualis inclinationi circulorum. Item anguli qui sunt deinceps sunt æquales duobus rectis.

P R O P. IV.

Triangula erunt æqualia & congrua, si duo latera habeant duobus lateribus æqualia, & angulos æqualibus lateribus comprehensos etiam æquales.

P R O P. IV.

Item Triangula erunt æqualia & congrua, si latus cum angulis adjacentibus in uno triangulo sit æquale lateri cum angulis adjacentibus in altero triangulo.

P R O P. VI.

Triangula æquilatera sunt etiam æquiangula.

P R O P. VII.

In Triangulis Isoscelibus, anguli ad basim sunt æquales.

P R O P. VIII.

Si anguli ad basim fuerint æquales, erit Triangulum Isosceles.

Eodem modo demonstrantur quinque propositiones præcedentes ut in triangulis planis.

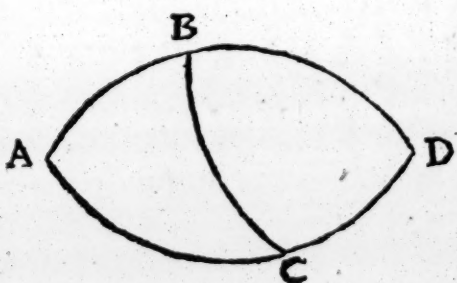
P R O P. IX.

Quælibet duo trianguli latera reliqua sunt majora.

Nam arcus circuli maximi, inter duo quælibet in superficie sphæræ puncta, est via brevissima.

P R O P. X.

Quodlibet trianguli latus minus est semicirculo.



Producantur trianguli ABC latera AC AB, donec conveniunt in D, erit arcus ACD semicirculus, qui major est quam AC.

P R O P. XI.

Trianguli latera sunt circulo minora.

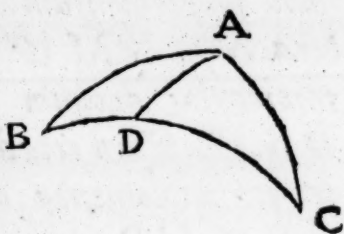
Est enim $DB + DC$ major quam BC , (per prop. 9.) & utrinque addendo $BA + AC$, erit $DBA + DCA$, hoc est, circulus major quam $AB + BC + AC$, quæ sunt tria latera trianguli ABC.

P R O P.

PROP. XII.

In triangulo ABC, major angulus A majori lateri subtenditur.

Fiat angulus $BAD =$ angulo B, & erit $AD = BD$ (per 8. hujus) unde $BDC = DA + DC$, & hi arcus majores sunt quam AC, est itaque latus BC, quod subtendit angulum BAC, majus quam AC, quod subtendit angulum B.



PROP. XIII.

In quolibet triangulo ABC, si summa Crurum AB BC sit major æqualis vel minor semicirculo; internus angulus ad basim AC erit major æqualis aut minor externo & opposito BCD, ideoque summa angulorum A & ACB major erit, aut æqualis, aut minor duobus rectis.

Vide Fig. Prop. 10.

Sit primò $AB + BC =$ semicirculo $= AD$, erit $BC = BD$; & anguli BCD & D æquales, (per 7 hujus) unde & angulus BCD erit $=$ angulo A.

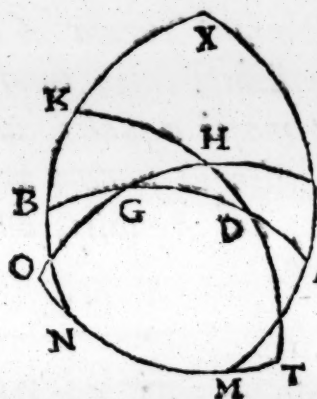
Sit secundò $AB + BC$ majores quam AD , erit BC major quam BD ; unde & angulus D, hoc est angulus A) major erit angulo BCD . (per 12. hujus) Similiter ostendetur, si $AB + BC$ sint simul minores semicirculo, fore angulum A minorem angulo BCD . & quoniam anguli BCD & BCA sunt $=$ duobus rectis; si angulus A sit major BCD , erit A & BCA majores duobus rectis. Si A sit $= BCD$ erit A & BCA æquales duobus rectis. Si vero A sit minor quam BCD , erunt A & BCA minores duobus rectis. Q. E. D.

PROP.

PROP. XIV.

In quolibet triangulo GHD, laterum poli, ductis circulis maximis, constituunt aliud triangulum XMN, quod supplementum est trianguli GHD; nempe latera NX XM & NM erunt supplementa ad semicirculos arcuum qui sunt mensuræ angulorum D, G, H. Quin etiam mensuræ angulorum M, X, N, erunt supplementa ad semicirculos, laterum & HG & HD.

Polis G, H, D, describantur maximi circuli XCAM, TMNO, XKBN. Et quia G est polus circuli XCAM,



erit $GM = \text{Quadranti}$, (per cor. 1. prop. 2.) & ob H polum circuli TMO, erit HM quoque Quadrans; Quare (per corol. 1. prop. 3.) erit M polus circuli GH. Similiter quia D est polus circuli XBN, & H polus circuli TMN, erunt arcus DN HN Quadrantes; ac proinde (per cor. 1. prop. 3.) N erit polus circuli

HD. Et eadem ratione, ob GX DX quadrantes, erit X polus circuli GD. Hisce præmissis.

Quoniam est $NK = \text{Quadranti}$, (cor. 1. prop. 2.) & $XB = \text{Quadranti}$, erunt $NK + XB$ hoc est $NX + KB = \text{duobus Quadrantibus seu semicirculo}$; adeoque est NX supplementum arcus KB seu mensuræ anguli HDG ad semicirculum. Similiter quia est $MC = \text{Quadranti}$, & $XA = \text{Quadranti}$; erunt $MC + XA$, hoc est, $XM + AC = \text{duobus quadrantibus seu semicirculo}$, & proinde XM est supplementum arcus AC qui est mensura anguli HGD . Quinetiam, ob MO , NT Quadrantes, erunt $MO + NT = OT + NM = \text{semicirculo}$. itaque est NM supplementum ad semicirculum arcus OT seu mensuræ anguli GHD . Q. E. D.

Præterea

Præterea quia DK HT sunt quadrantes, erunt DK + HT seu KT + HD æquales duobus quadrantibus, seu semicirculo. Est ergo KT, seu mensura anguli XNM, supplementum lateris HD ad semicirculum. Nec dissimili methodo ostendetur OC mensuram anguli XMN esse supplementum lateris GH. Et BA mensuram anguli X esse supplementum lateris GD. Q. E. D.

PROP. XV.

Triangula æquiangula sunt etiam æquilatera.

Nam eorum supplementa sunt æquilatera, (per 14. hujus) ergo & æquiangula, quare & ipsa sunt æquilatera, per prop. 14. partem secundam.

PROP. XVI.

Trianguli tres anguli sunt majores duobus rectis, & minores sex rectis.

Vide Fig. Prop. 14.

Nam tres mensuræ angulorum G, H, D, una cum tribus lateribus trianguli XNM faciunt tres semicirculos, (per 14. hujus) sed tria latera trianguli XNM minora sunt duobus semicirculis, (per 11. hujus) quare tres mensuræ angulorum GHD majores sunt semicirculo, & proinde anguli GHD majores erunt duobus rectis.

Propositionis secunda pars patet, nam in quolibet triangulo, externi & interni anguli simul tantum faciunt sex rectos, unde interni sunt minores quam sex recti.

PROP. XVII.

Si à puncto R quod circuli AFB E polus non est, in circumferentiam cadant arcus maximorum circulorum RA RB RG RV, maximus est RA, qui per ejus polum C incedit; reliquis vero minimus, cæteri prout à maximo recedunt minores sunt, faciuntque

que cum priore circulo AFB angulum obtusum ex parte maximi arcus.

Vide Fig. Prop. I.

Quia C est polus circuli AFB, erunt CD & huic parallela RS perpendiculares ad planum AFB; Ductis autem SA SG SV; erit (per 7. El. 3.) SA major quam SG, & SG major quam SV. unde in Triangulis rectangulis planis RSA RSG RSV, erunt $RSq + SAq$ seu RAq majora quam $RSq + SGq$ seu RGq, & proinde RA major erit RG; & arcus RA major arcu RG. Similiter erunt $RSq + SGq$ seu RGq majora quam $RSq + SVq$ seu RVq; & proinde RG major RV, & arcus RG major arcu RV.

2do. Est angulus RGA major angulo CGA qui rectus est, (per corol. prop. 3.) Et angulus RVA major angulo CVA qui quoque rectus est, quare anguli RGA RVA sunt obtusi.

P R O P. XVIII.

In triangulo rectangulo ad A, crura angulum rectum continentia sunt ejusdem affectionis cum angulis oppositis, hoc est, si crura sint majora aut minora Quadrantibus, anguli illis oppositi erunt majores aut minores rectis angulis: Vide Fig. prop. primæ.

Nam si AC fit Quadrans, C erit polus circuli AFB, & anguli AGC vel AVC erunt recti. Si crus AR sit majus quadrante, erit angulus AGR major recto (per 17. hujus.) Si crus sit minus quadrante ut AX, angulus AGX erit minor recto.

P R O P. XIX.

Si duo crura trianguli rectanguli (& consequenter anguli) sint ejusdem affectionis, id est, utrumque vel majus

majus vel minus Quadrante, hypotenusa erit minus quadrante.

Vide Fig. Prop. I.

In triangulo ARV vel BRV , sit F polus cruris AR , & erit RF quadrans, qui major est quam RV (per 17. hujus.)

PROP. XX.

Si sint diversæ affectionis, hypotenusa erit major Quadrante.

Nam in triangulo ARG , est RG major quam RF qui est quadrans.

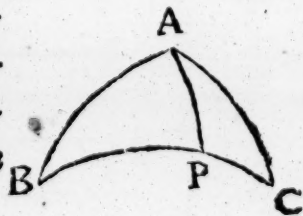
PROP. XXI.

Si Hypotenusa sit major vel minor quadrante, crura anguli recti, ideoque & anguli oppositi sunt ejusdem aut diversæ affectionis.

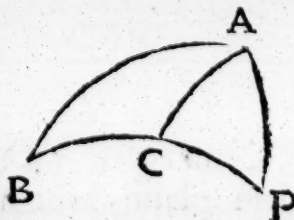
Hæc propositio est priorum conversa; & facile ex iisdem sequitur.

PROP. XXII.

In quovis triangulo ABC , si anguli B & C ad basim sunt ejusdem affectionis, perpendicularis AP cadet intra triangulum; si sint diversæ affectionis, perpendicularis cadet extra triangulum.



In primo casu si perpendicularis non cadat intra, cadat extra triangulum, (ut in fig. 2.) Tum in triangulo ABP , est AP ejusdem affectionis cum angulo B ; & similiter in triangulo ACP , est AP ejusdem affectionis cum angulo C ; ergo cum ABC & ACP sunt ejusdem affectionis,



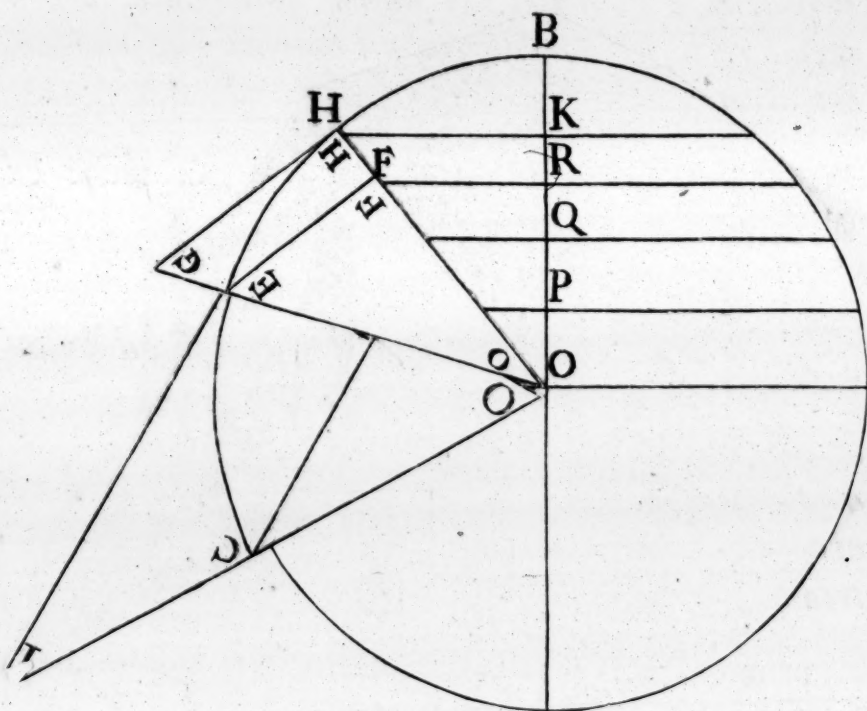
30 TRIGONOMETRIÆ SPHERICÆ

nis, erunt anguli ABC & ACB diversæ affectionis; quod est contra hypothesim.

In 2^{do} Casu si perpendicularis non cadat extra, cadet intra, (in fig. 1.) Et in triangulo ABP , est angulus B ejusdem affectionis cum crure AP , & similiter in triangulo ACP est angulus C ejusdem affectionis cum AP , unde anguli B & C sunt ejusdem affectionis, quod est contra hypothesim

PROP. XXIII.

In Triangulis BAC BHE rectangulis ad A & H , si idem fuerit angulus acutus B ad basim BA vel BH , Sinus hypotenusarum erunt sinubus arcuum perpendicularium proportionales.



Nam rectæ CD EF perpendiculariter insistentes eidem plano sunt parallelæ. Item FR DP radio OP perpendiculares, sunt quoque parallelæ; unde & plana triangulorum EFR CDP sunt parallelæ (per 15. El. 11.) Quare & CP ER horum planorum communes sectiones

sectiones cum plano per BE CO transeunte parallelæ erunt (per 16. El. 11.) Triangula igitur CDP EFR æquiangula erunt. Quare CP sinus Hypotenusæ BC est ad CD finum arcus perpendicularis CA ; ut ER sinus hypotenusæ BE est ad EF finum arcus perpendicularis EH . Q. E. D.

PROP. XXIV.

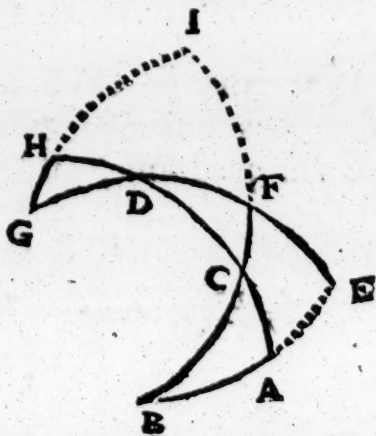
Isdem positis, AQ HK sinus basium, tangentibus IA GH arcuum perpendicularium, sunt proportionales.

Nam similiter ut in præcedente propositione, ostendetur triangula QAI KHG esse æquiangula; unde $QA:AI::KH:HG$.

PROP. XXV.

In Triangulo ABC rectangulo ad A . Ut cosinus anguli B existentis ad Basim BA ad finum anguli verticalis ACB , ita cosinus arcus perpendicularis ad Radium.

Præparatio. Producantur latera BA BC CA ita ut BE BF CI CH sint Quadrantes, polis B & C ducantur circuli maximi $EFDG$ IHG . & erunt anguli ad $E, F; I$ & H recti. Quare D est polus BAE (per cor. 2 pr. 2 hujus) & G polus $IFCB$, erit etiam $AE =$ complemento arcus BA . Item FE mensura anguli $B = GD$, & DF eorum complementum. erit quoque $BC = FI =$ mensuræ anguli G , & CF eorum complementum. Item est $CA = HD$, & DC utriusque complementum. Hisce præmissis, in triangulis HIC DCF rectangulis ad I & F & habentibus eundem angulum



32 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

gulum C acutum, ob BA minorem quadrante, erit S, DF : S, HI :: S, DC : S, HC id est, cosinus anguli B est ad finum anguli verticalis BCA ut cosinus CA ad Radium. Q. E. D.

P R O P. XXVI.

Cosinus basis : cosin. Hypotenusæ :: R : coS perpendicularis.

Nam in Triangulis AED CFD rectangulis ad E & F; habentibus eundem angulum D acutum: ob AE quadrante minorem, est S, EA : S, CF :: S, DA : S, DC. Q. E. D.

P R O P. XXVII.

S, Baseos : R :: T, perpendicularis : T, anguli ad basim.

Nam in Triangulis BAC BEF rectangulis ad A & E & habentibus eundem angulum B acutum, ob AC minorem quadrante, S, BA : S, BE :: T, AC : T, EF. Q. E. D.

P R O P. XXVIII.

CoS, anguli verticalis : R :: T, perpendicularis : T, Hypotenusæ.

In Triangulis GIF GHD rectangulis ad I & H, & habentibus eundem angulum G acutum, ob HD minorem HC seu quadrante, est S, GH : S, GI :: T, HD : T, IF.

P R O P. XXIX.

S, Hypotenusæ : R :: S, perpendicularis : S, anguli ad basim.

In Triangulis præcedentibus, est S, IF : S, GF :: S, HD : S, GD.

PROP.

PROP. XXX.

*Radius : coS. Hypotenusa :: T, anguli verticalis :
coT, anguli ad basim.*

In Triangulis HIC DFC rectangulis ad I & F, & habentibus eundem angulum C acutum, ob DF minorem quadrante, Est $S, CI : S, CF :: T, HI : T, DF$. hoc est, $R : coS, BC :: Tang, C : coT, anguli B$.

Propositiones sex præcedentes ad omnes casus triangulorum rectangulorum resolvendos sufficiunt, sequuntur illi numero sedecim cum suis analogiis ex hisce deductis.

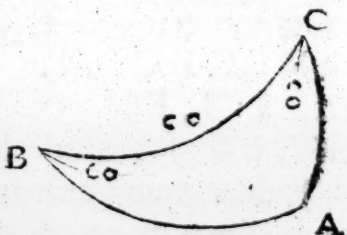
	Datis præter ang. rectum	Quær.	
1	AC & B	C	$R : coS, CA :: S, C : coS, B$ ejusdem speciei cum CA. per 25 inverse
2	AC & C	B	$coS, CA : R :: coS, B : S, C$ ambigui. per 25
3	B & C	A	$S, C : coS, B :: R : coS, CA$ ejusdem speciei cum ang. B. per 25 & 18
4	BA CAB	BC	$R : coS, BA :: coS, AC : coS, BC$. per 26 Si BA AC fuerint ejusdem affectionis nec Quadrantes, erit BC minor quadrante; si diversæ, erit BC quadrante major. & 19 20
5	BA BC AC		$coS, BA : R :: coS, BC : coS, CA$. per 26 Si BC sit major aut minor quadrante, BA & CA erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur BA ejusque Species, ergo. & 21
6	BA CAB		$S, BA : R :: T, CA : T, B$ ejusdem affectionis cum latere opposito CA. per 27 & 18
7	BA B	AC	$R : S, BA :: T, B : T, AC$, ejusdem speciei cum B. per 27 & 18

34 TRIGONOMETRIÆ SPHERICÆ

	Datis præter ang. rectum.		Quær.	
8	AC	B	BA	T, B : R :: T, CA : S, BA ambigui. per 27
9	BC	C	AC	R : coS, C :: T, BC : T, CA. Si BC fit major aut minor quadrante, anguli C & B sunt ejusdem aut diversæ affectionis, quare data specie ang. B dabitur AC. per 28 & 21
10	AC	C	BC	coS, C : R :: T, AC : T, BC. pro ut ang. C & AC fuerint ejusdem aut diversæ affectionis, BC erit minor aut major quadrante. per 18, 19, 20
11	BC	AC	C	T, BC : R :: T, CA : coS, C. Si BC fuerit major aut minor Quadrante, CA & BA & proinde anguli C & B erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur species CA, ergo dabitur species anguli C. per 28 & 21
12	BC	B	AC	R : S, BC :: S, B : S, AC ejusdem speciei cum B. per 29 & 18
13	AC	B	BC	S, B : S, AC :: R : S, BC ambigui. per 29
14	BC	AC	B	S, BC : R :: S, AC : S, B ejusdem speciei cum CA. per 29
15	B	C	BC	T, C : R :: coT, B : coS, BC. pro ut anguli B & C ejusdem aut diversæ affectionis fuerint, erit BC minor aut major quadrante. per 30 & 19 20
16	BC	C	B	R : coS, BC :: T, C : coT, B. pro ut BC fuerit minor aut major quadrante; anguli C & B erunt ejusdem aut diversæ affectionis. Sed datur species anguli C. quare dabitur species anguli B. per 30 & 21

De Resolutione Triangulorum Rectangulorum Sphæricorum, per quinque partes circulares.

PErpenſis Analogiis, quibus Triangula Sphærica Rectangula ſolvuntur, Dominus *Neperus*, nobilis ille Logarithmorum Inventor, duas excogitavit Regulas memoriâ facile retinendas, quarum ope omnes ſedecim caſus reſolvi poſſunt; Nam cum in hiſce triangulis, præter angulum rectum, ſint tria latera & duo anguli, latera angulum rectum comprehendentia, hypotenufa autem & reliquorum angulorum complementa, vocavit *Neperus partes circulares*. Et cum datæ ſunt duæ quælibet partes, & quæritur Tertia, Harum trium una, quæ dicitur *pars media*, vel adjacet duobus reliquis partibus, quæ itaque vocantur *extremæ adjacentes*; vel neutri adjacet, in quo caſu, dicuntur *extremæ oppoſitæ*; Sic ſi complementum anguli B ponatur pars media, Crura AB & complementum Hypotenufa BC ſunt partes extremæ adjacentes; At complementum anguli C, & latus AC ſunt extremæ oppoſitæ. Item poſito complemento hypotenufa BC parte media, complementa angulorum B & C ſunt extremæ adjacentes; & AB AC crura ſunt extremæ oppoſitæ. Sic etiam poſito crure AB parte media, complementum anguli B, & AC ſunt extremæ adjacentes; Nam angulus rectus A non intercipit adjacenciam, quia non eſt pars circularis. At eidem parti mediæ complementum anguli C & complementum hypotenufa BC ſunt extremæ oppoſitæ. Hiſce præmiſſis.



REGULA PRIMA.

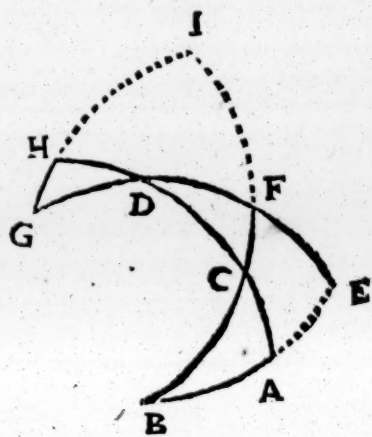
In Triangulo Rectangulo Sphærico, Rectangulum ſub Radio & ſinu partis mediæ, æquale eſt rectangulo ſub Tangentibus partium Adjacentium.

REGULA SECUNDA.

Rectangulum sub radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub cosinibus partium oppositarum.

Utriusque Regulæ tres sunt casus. Nam pars mediæ vel potest esse complementum anguli B vel C, vel complementum hypotenusæ BC; vel denique unum ex cruribus scil. AB vel AC.

Casus 1. Sit complementum anguli C pars mediæ. Et erunt AC & complementum hypotenusæ BC extremæ adjacentes. Per pr. 28. Est ut cosinus anguli verticalis C ad Radium, Ita Tangens CA ad Tangentem Hypotenusæ p C. permutando erit $\cos C : T, CA :: R : T, BC$. sed ut notum



est, $R : T, BC :: \cos C, CA$. quare $\cos C, CA :: \cos C, BC$. Unde $R \times \cos C = T, CA \times \cos C, BC$.

Eidem complemento anguli C parti mediæ, extremæ oppositæ sunt complementum anguli B & AB, & (per prop. 25.) $\cos C$ est ad sinum anguli CDF ut $\cos D$ ad Radium, est vero $\sin CDF = S, AE = \cos B, A$, & $\cos D = S, EF = S, \text{ang. B.}$ unde erit $\cos C : \cos B, A :: S, B : R$. & $R \times \cos C = \cos B, A \times S, B$ hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ, æquatur rectangulo sub cosinibus extremarum oppositarum.

Casus 2. Sit complementum hypotenusæ BC pars mediæ, & complementa angulorum B & C erunt extremæ adjacentes. In triangulo DCF (per prop. 27.) Est $S, CF : R :: T, DF : T, C$. unde permutando $S, CF : T, DF :: (R : T, C ::) \cos T, C : R$. est autem $S, CF = \cos B, C$ & $T, DF = \cos T, B$. quare est $R \times \cos B, C = \cos T, C \times \cos T, B$. hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ æquatur producto

producto ex Tangentibus partium adjacentium extremarum.

Eidem parti mediæ, scil. complemento BC, adfunt extremæ oppositæ AB AC, & (per prop. 26.) est $\cos, BA : \cos, BC :: R : \cos, AC$. quare erit $R \times \cos, BC = \cos, BA \times \cos, AC$.

Cas. 3. Sit denique AB pars media, & erunt complementum anguli B & AC extremæ adjacentes, (& per pr. 27.) $S, AB : R :: T, CA : TB$. unde erit $S, AB : T, CA :: (R : T, B ::) \cos T, B : R$. adeoque erit $R \times S, AB = T, CA \times \cos T, B$.

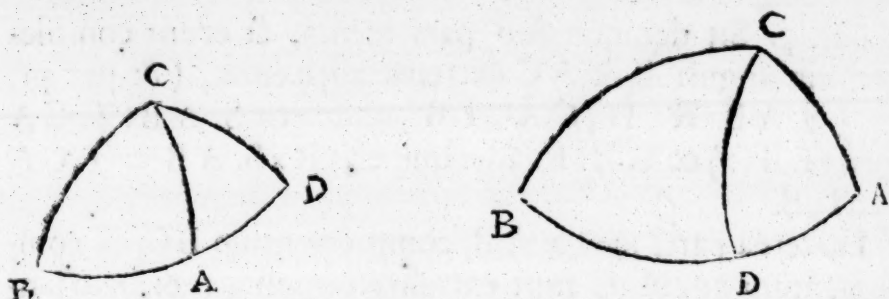
Præterea parti mediæ AB, complementum BC, & complementum anguli C sunt extremæ oppositæ; & in triangulo GHD (per prop. 25.) Est $\cos, D : S, DGH :: \cos, GH : R$. est vero $\cos, D = \cos, AE = S, AB$, & $S, G = S, IF = S, BC$. Item est $\cos, GH = S, HI = S, C$. quare erit $S, AB : S, BC :: S, C : R$. & hinc $R \times S, AB = S, BC \times S, C$.

Itaque in omni casu, rectangulum sub radio & sinu partis mediæ æquale erit tam rectangulo sub cosinibus extremarum oppositarum, quam rectangulo sub tangentibus extremarum adjacentium. Et proinde si æquationes illæ resolvantur in Analogias (per 16. Elem. 6.) ope regulæ Proportionis, partes ignotæ innotescunt. Et si pars quæ sita sit media, primus Analogiæ terminus erit Radius, secundum & tertium occupant locum tangentes vel cosinus partium extremarum. Si vero quæraturs extremarum una, Analogia incipi debet cum altera, atque Radius sinusque partis mediæ, in mediis ponantur locis, ut quartum teneat pars quæ sita.

IN Triangulis Sphæricis obliquangulis BCD, demisso arcu perpendiculari AC, ab angulo C in basim BD, (productam si opus fuerit,) ut duo fiant Triangula BAC DAC rectangula; eorum ope resolvi possunt plerique casus Triangulorum obliquangulorum.

PROP. XXXI.

Cofinus angulorum B & D ad basim B D, sinubus angulorum verticalium B C A D C A sunt proportionales.



Nam $\cos B : S, B C A :: (\cos C A : R ::) \cos D : S, D C A$ (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cofinus laterum B C D C sunt proportionales cosinibus basium B A D A.

Est enim $\cos B C : \cos B A :: (\cos C A : R ::) \cos D C : \cos D A$. (per 26 hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium B A D A, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim B D.

Quia per 27. hujus est, $S, B A : R :: T, A C : T$, anguli B. Item per eandem, inverse $R : S, D A :: T$, ang. D : $T, A C$. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) $S, B A : S, D A :: T, \text{ang. D} : T, \text{ang. B}$.

PROP. XXXIV.

Tangentes laterum B C D C sunt in reciproca proportione cosinuum angulorum verticalium B C A, D C A.

Quia

Quia per 28. hujus permutando, Est

$$T, BC : R :: T, CA : coS, BCA$$

& per eandem

R : coS, D C A : T, D C : T, C A

quare ex æquo in perturbata ratione est.

$$T, BC : coS, DCA :: T, DC : coS, BCA.$$

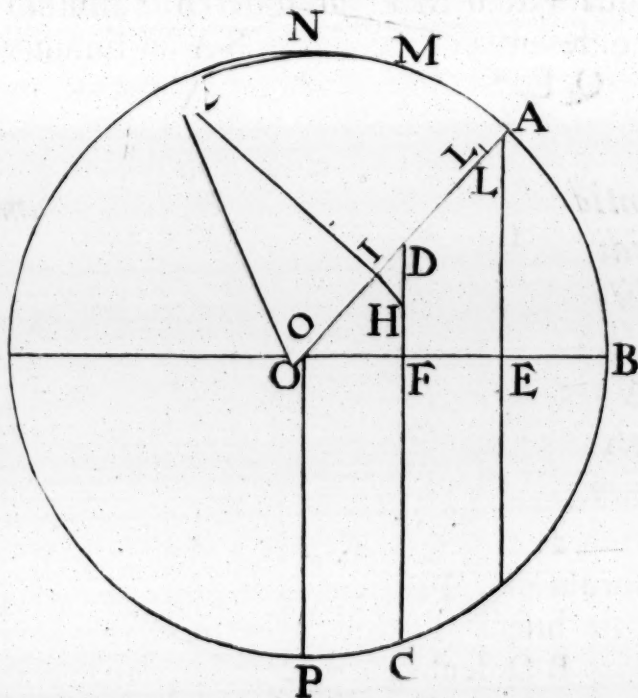
PROP XXXV.

*Sinus laterum BC DC sinibus angulorum oppositorum
B & D sunt proportionales.*

Quia per 29. hujus $S, BC : R :: S, CA : S, \text{ang. } B,$
 & per eandem inverſe $R : S, DC :: S, \text{ang. } D : S, CA$
 erit ex æquo in perturbata ratione $S, BC : S, DC :: S, D :$
 $S, B.$

PROP. XXXVI.

In Triangulo quovis Sphærico ABC , $CF \times AE$ vel $FM \times AE$, rectangulum sub sinibus crurum $BCB A$ est ad radii quadratum, ut IL seu $IA - LA$ differentia sinuum versorum Basis AC , & differentię crurum AM , ad GN sinum versum anguli B .



Polo B describatur circulus maximus PN; sintque BP

C 4

B N

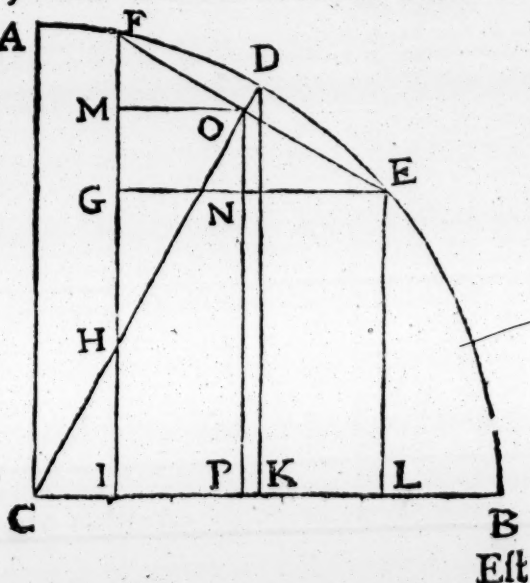
40 TRIGONOMETRIÆ SPHERICÆ

BN quadrantes; & PN est mensura anguli B; eodem polo B per C describatur circulus minor CFM; horum circulorum plana recta erunt plano BON, (per 2. h.) & PG CH perpendiculares in idem planum, cadent in communes sectiones ON FM puta in G & H. ducatur HI perpendicularis ad AO, & planum per CH HI perpendiculare erit plano AOB, unde AI perpendicularis ad HI, erit perpendicularis ad rectam CI, (per def. 4. El. 11.) est itaque AI sinus versus arcus AC, & AL sinus versus arcus AM = BM - BA = BC - BA. Triangula Isoscelia CFM PON sunt æquiangulara ob MF NO item CF PO parallelas (per 16. El. 11.) quare demissis perpendicularis CH PG in latera FM ON, similiter divisa erunt Triangula; & erit FM:ON::MH:GN. Itemque ob triangula AOE DIH DLM æquiangulara erit $AE:AO::IL:MH$ at ostensum est, esse FM:ON::MH:GN quare erit $AE \times FM$ ad $AO \times ON$ ut $IL \times MH$, ad $MH \times GN$ seu ut IL ad GN. hoc est rectangulum sub sinibus crurum est ad quadratum Radii ut differentia sinuum versorum basis & differentia crurum BC BA ad sinum versus anguli B. Q.E.D.

PROP. XXXVII.

Differentia Sinuum versorum duorum arcuum ducta in dimidium radii, æqualis est rectangulo sub sinu semisumma & sinu semidifferentia eorundem arcuum.

Sint duo arcus BE BF, quorum differentia EF sit bisecta in D, & erit BD semisumma arcuum, & FD semidifferentia.

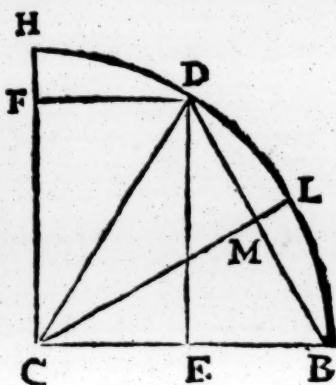


Est $GE = IL$ differentiae sinuum versorum arcuum BE BF ; Item est FO sinus semidifferentiae arcuum. Ob æqui-
 angula triangula CDK FEG ; erit $DK:GE::(CD:$
 $FE::)\frac{1}{2}CD:\frac{1}{2}FE$. Unde est $DK \times \frac{1}{2}FE$ seu $DK \times$
 $FO = GE \times \frac{1}{2}CD = IL \times \frac{1}{2}CD$. Q. E. D.

PROP. XXXVIII.

*Sinus versus cujusvis arcus, ductus in dimidium Radii,
 æqualis est quadrato sinus di-
 midii ejusdem arcus.*

Triangula CBM DEB sunt
 æquiangula ob angulos ad M & E
 rectos & angulum ad B commu-
 nem. Quare est $EB:BD::BM:$
 BC erit itaque $EB \times BC = BM \times$
 BD & $EB \times \frac{1}{2}BC = BM \times \frac{1}{2}BD$
 $= BM$ q. Q. E. D.



PROP. XXXIX.

*In quolibet Triangulo ABC , cujus crura angulum B
 continentia sint BC AB , & basis AC eundem an-
 gulum subtendat; si capiatur AM arcus = diffe-
 rentiæ crurum = $BC - AB$. erit Rectangulum sub
 sinibus crurum BC BA ad quadratum Radii ut*

Rectangulum sub sinu arcus $\frac{AC + AM}{2}$ & sinu arcus

$\frac{AC - AM}{2}$ ad Quadratum sinus dimidii anguli B .

Vide Fig. Prop. 36. hujus.

Quoniam est rectangulum sub sinibus crurum AB BC
 ad quadratum radii, ut IL ad sinum versum anguli B
 vel ut $\frac{1}{2}R \times IL$ ad $\frac{1}{2}R$ ductum in sinum versum anguli B
 (per prop. 36. hujus) Est autem $\frac{1}{2}R \times IL =$ rectangulo
 sub

42 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

sub finibus arcuum $\frac{AC + AM}{2}$ & $\frac{AC - AM}{2}$ (per pr.

37. hujus.) Item est $\frac{1}{2}$ R ductus in sinum versum anguli B æqualis Quadrato sinus dimidii anguli B. Quare erit Rectangulum sub finibus crurum, ad Radii quadratum, ut Re-

ctangulum sub finibus arcuum $\frac{AC + AM}{2}$ & $\frac{AC - AM}{2}$

ad Quadratum sinus dimidii anguli B. Q. E. D.

Sequuntur duodecim Casus Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

	Datis.	Quær.	Fiat. <i>Vide Fig. Prop. 31.</i>
1	Ang. B, D, & BC.	Ang. C.	coS, BC : R :: T, B : coT, BCA (per 30. hujus.) Item coS, B : S, BCA :: coS, D : S, DCA (per 31. hujus.) Horum angulorum BCA DCA summa, si perpendicularis cadat intra triangulum, vel differentia, si extra cadat; erit = BCD. Num perpendicularis cadat intra vel extra, cognoscitur ex affectione angulorum B & D (per 22. hujus) quod semel monuisse sufficiat.
2	Ang. B, C, & latere BC.	Ang. D.	coS, BC : R :: T, B : coT, BCA (per 30. hujus) & S, BCA : S, DCA :: coS, B : coS, D (per 31. hujus.) Si BCA sit minor BCD, angulus D erit ejusdem affectionis cum angulo B. Sin BCA sit major BCD, anguli B & D erunt affectionis diversæ per conversam pr. 22.
3	BC CD lateribus & ang. B.	BD latus.	R : coS, B :: T, BC : T, BA. (per 28. hujus) & coS, BC : coS, BA :: coS, DC : coS, DA (per 32. hujus.) horum BA DA summa vel differentia, prout perpendicularis cadit intra, vel extra Triangulum, est æqualis BD; quod cognosci nequit nisi cognita sit species alterius anguli D.

Datis

	Datis.	Quær.	Fiat.
4	BC DB lateri- bus & ang. B.	CD latus.	R: coS, B:: T, BC: T, BA (per 28. hu- jus.) Et coS, BA: coS, BC:: coS, DA: coS, DC. (per 32. h.) Prout DA fimi- lis est aut diffimilis CA vel ang. BDC, erit DC minor aut major Quadrante (per 19 & 20 hujus.)
5	B, D, ang. & BC la- tere.	BD la- tus.	R: coS, B:: T, BC: T, BA (per 28. hujus.) Et T, D: TB:: S, BA: S, DA (per 33. hujus) quorum BA DA sum- ma vel differentia = BD.
6	BC BD lateri- bus & ang. B.	Ang. D.	R: coS, B:: T, BC: T, BA. (per 28. hu- jus.) Et S, DA: S, BA:: T, B: T, D (per 33. hujus.) Prout BD minor est aut major quam BA, angulus D similis aut diffimilis erit angulo B. (per 22. hujus.)
7	BC DC lateri- bus & ang. B.	Ang. C.	coS, BC: R:: coT, B: T, BCA (per 30. h.) Et T, DC: T, BC:: coS, BCA: coS, DCA (per 34. hujus.) Angulorum BCA DCA summa aut differentia, prout perpendicularis cadit intra vel extra triangulum, est æqualis angulo BCD.
8	B, C, ang. & BC la- tere.	DC latus.	coS, BC: R:: coT, B: T, BCA. (per 30. hujus. Item coS, DCA: coS, BCA: T, BC: T, DC (per 34. h.) Si angulus DCA similis sit angulo B (hoc est, si AD sit similis CA) erit DC minor quadrante. Si anguli DCA & B sint diffimiles, erit DC quadrante major, quod sequitur (ex pr. 18 19 & 20 h.)
9	BC DC lat. & ang. B.	D. ang	S, CD: S, B:: S, BC: S, D qui ambi- guus est. Analogia sequitur (ex prop. 35. hujus.)
10	B D ang. & BC lat.	DC	S, D: S, BC:: S, B: S, DC quod latus ambiguum est.

Datis.

44 TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ

	Datis.	Quær.	Fiat.
11	AB BC CA o-B. mnibus lateri- bus vi- de fig. pr. 36.	Ang. B.	Rectangulum sub sinibus crurum A B BC:quadratum Radii::rectangulum sub sinibus arcuum $\frac{AC + AM}{2}$ $\frac{AC - AM}{2}$: Quadrato sinus $\frac{1}{2}$ ang. B. per prop. 39.
12	G H D G D omni- bus. ang.	latus.	<i>Vide fig. prop. 14.</i> In Triangulo X N M, Est MN com- plementum anguli G H D ad semicir- culum. X M complementum anguli G & X N complementum anguli D. & angulus X complementum est lateris G D ad semicirculum. Quare mutatis angulis in latera, & lateribus in angu- los; eadem est operatio quæ est in ca- su 11 hujus, cum arcus & eorum com- plementa ad semicirculos habeant eos- dem sinus.

D E

Natura & Arithmetica

LOGARITHMORUM

P R Æ F A T I O.

Ingens olim compendium accepit *Mathesis*, primo characterum Indicorum, deinde Fractionum decimalium introductione; non minus tamen adjumenti ex Logarithmis, quam ex utroque invento, ei accessit: quorum quidem usum, per omnes disciplinas mathematicas latissime patentem, quis iis studiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immensi & alias plane intrastabiles sine ullo tædio in ordinem coguntur: præsentissimum horum auxilium ubique conspicitur, siue cursum navis dirigat Nauta, siue curvarum altiorum indolem investiget Geometra, siue stellarum loca exquirat Astronomus, siue alia naturæ phænomena explicet Physicus, siue demum pecuniæ ex usuris incrementum computet Nummatus.

Argumento, in quo versatur hic libellus, illustrando non defuerunt viri in re *Mathematica* primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissimè illi quidem, sed magistris solum scripserunt: alii ad Tyronum captum se accommodantes, certas quasdam, easque magis obvias Logarithmorum proprietates selegerunt, intimam eorum naturam non aperuerunt. Quod igitur adhuc desiderari videbatur, mihi in animo erat supplere hoc tractatu, qui in id præcipue collimat, ut Logarithmorum scientia iis, qui ultra *Arithmeticæ* speciosæ & *Geometriæ* elementa non processerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile

Mirabile Logarithmorum Inventum Nepero Scoto Merchestonii Baroni debetur, qui primus canonem Logarithmorum descripsit, construxit, & edidit, Edinburgi Anno 1614. Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, grati arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris Inventis plures contendant Gentes, omnes tamen Neperum Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruitur.

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam Neperus excogitavit, & communicato consilio cum Domino Henrico Briggio, Geometriæ in Academia Oxoniensi Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam redactos compleret. Sed Nepero demortuo, totum quod restabat onus in Briggium devolutum est, qui magno labore, & summa qua pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus (seu ab 1 usque ad 20000) aliisque undecim ab 90000 usque ad 101000, pro quibus omnibus numeris, supputavit Logarithmos quatuordecim figurarum locis constantes. Hic canon editus est Londini anno 1624.

Eundem Canonem iteratò edidit Goudæ apud Batavos anno 1628. Adrianus Vlacq, suppletis, ut docuerat Briggs, chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.

Computavit etiam Briggs Logarithmos Sinuum & Tangentium, pro singulis Gradibus graduumque centesimis, ad 15 figurarum loca, quibus adjunxit sinus Tangentes & secantes veros seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi sinuum & Tangentium dicuntur sinus & Tangentes Artificiales. ipsi vero sinus & Tangentes, naturales vocantur. Has Tabulas simul cum Tractatu de Tabularum constructione & usu, post mortem Briggii, sub nomine Trigonometriæ Britannicæ edidit Henricus Gelibrand Londini Anno 1633.

Post illud tempus, pluribus in locis Tabularum compendia

dia prodire. In quibus sinus Tangentes, eorumque Logarithmi, tantum constant septem notarum locis, & numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 usque ad 10000, qui pro plerisque casibus sufficere possunt.

Harum Tabularum dispositio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit Nathaniel Roe Anglus Suffolciensis, quamque, quibusdam in melius mutatis, sequitur Sherwinus in Tabulis suis Mathematicis Londini Anno 1705 editis, in quibus habentur Logarithmi Numerorum omnium ab unitate usque ad 101000 septem figurarum notis constantes, Logarithmorum quoque differentiae partesque proportionales adscribuntur, quarum ope Logarithmi numerorum usque ad 10000000 facile haberi possunt: quatenus scil. hi Logarithmi septem tantum figurarum notis exprimantur. Præterea in iisdem prostant Sinus Tangentes & Secantes, cum eorum Logarithmis & differentiis pro quolibet gradu & minuto Quadrantis, cum aliis quibusdam tabulis Matheſi Practicæ inservientibus.

CAPUT I.

De ortu & natura Logarithmorum.

Quemadmodum in Geometria, linearum magnitudines numeris sæpe definiuntur; ita quoque in Arithmetica vicissim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, assumendo scil. lineam aliquam quæ ipsa unitatem repræsentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps, exponet. Hac ratione quorundam numerorum Genesis & proprietates melius concipiuntur, clariorque in animo versantur, quam per abstractos numeros fieri possit.

Hinc si quælibet lineæ a in seipsam ducatur, (*Fig. 1.*) quæ exinde prodit quantitas a^2 , non æstimanda est tanquam duarum dimensionum, sive ut Quadratum Geometricum cujus latus est lineæ a , sed tanquam lineæ quæ sit tertia proportionalis lineæ pro unitate assumptæ, & lineæ a . Sic etiam si a^2 per a multiplicetur, quæ prodit a^3 , non erit trium dimensionum quantitas, seu cubus Geometricus, sed lineæ quæ est quartus terminus in progressionem Geometricam cujus primus terminus est 1, secundus a . Nam termini 1 a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 a^7 &c. sunt in continua ratione 1 ad a : & indices terminis affixi ostendunt locum seu distantiam, quam quisque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 est in quinto loco ab unitate, a^6 in sexto seu sexies magis distans ab unitate quam a seu a^1 , qui immediate sequitur unitatem.

Si inter terminos 1 & a inferatur medius proportionalis qui est $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$, nam ejus distantia ab unitate erit semissis distantia a ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ scribi potest $a^{\frac{1}{2}}$. Et si inter a & a^2 inferatur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ seu $\frac{3}{2}$, nam ejus distantia erit sesquialtera distantia ipsius a ab unitate.

Si inter 1 & a inferantur duo medii proportionales;
horum

horum primus est radix cubica ipsius a , cujus index debet esse $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille distat ab unitate tertiâ tantum parte distantia ipsius a , adeoque radix cubica scribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hinc Index ipsius Unitatis est 0, nam unitas non distat à seipsâ.

Eadem series quantitatum Geometrice proportionalium continuari potest utrinque, tam descendendo versus sinistram, quam ascendendo versus dextram; termini enim

$$\frac{1}{a^5} \frac{1}{a^4} \frac{1}{a^3} \frac{1}{a^2} \frac{1}{a} \quad 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5 \quad \&c. \text{ sunt omnes in ea-}$$

dem progressionem Geometricam. Adeoque cum distantia ipsius a ab unitate sit versus dextram & positiva seu $+1$, distantia æqualis in contrariam partem, scil. distantia ter-

mini $\frac{1}{a}$ erit negativa seu -1 , qui erit index termini $\frac{1}{a}$

pro quo itaque scribi potest a^{-1} . Similiter in termino a^{-2} , index -2 ostendit terminum in secundo loco ab unitate versus sinistram locari, idemque valet terminus

a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} est idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hî

negativi ostendunt terminos ad quos pertinent, in partem discedere contrariam ei, quâ ab unitate progrediuntur termini, quorum indices sunt positivi. Hisce præmissis.

Si super lineam AN utrinque indefinite extensâ, (*Fig. 2.*) capiantur AC CE EG GI IL dextrorsum. Item AG GP &c. sinistrorsum, omnes inter se æquales: & ad puncta Π Γ A C E G I L erigantur super AN perpendiculares rectæ ΠΞ ΓΔ AB CD EF GH IK LM quæ sint omnes continue proportionales, numerosque representent, quorum AB sit unitas. Lineæ AC AE AG AI AL — AG — AP distantias numerorum ab unitate respective exponent, five locum & ordinem quem quisque numerus in serie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate distat. In AG cum sit tripla rectæ AC, erit numerus GH in tertio ab unitate loco, si modo CD sit in primo, sic LM erit in quinto loco cum sit $AL = 5 AC$.

Quod si proportionalium extremitates $\Sigma \Delta B D F H$ $K M$ rectis lineis jungantur; figura $\Sigma \Pi L M$ fit polygonum pluribus aut paucioribus constans lateribus, prout plures aut pauciores in progressionē fuerint termini.

Si partes $A C C E E G G I I L$ bisecentur in punctis $c e g i l$ & rursus excitentur perpendiculares $c d e f g h i k l m$, quæ sint mediæ proportionales inter $A B C D$, $C D E F$, $E F G H$, $G H I K$, $I K L M$, nova orietur proportionalium series, cujus termini incipiendo ab eo qui proxime sequitur unitatem duplo plures sunt, quam in prima serie, & terminorum differentia minores fiunt, propiusque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quam prius; quin etiam in hac nova serie, rectæ $A L A C$ distantias terminorum $L M C D$ ab unitate exponent, scilicet cum $A L$ decies major sit quam $A c$; erit $L M$ decimus seriei terminus ab unitate, & ob $A e$ triplo maiorem quam $A c$, erit $e f$ tertius seriei terminus, modo $c d$ sit primus: & inter $A B$ & $e f$ erunt duo medii proportionales, inter $A B$ vero & $L M$ erunt novem termini medii proportionales.

Quod si linearum extremitates $B d D f F h H$ &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus constans lateribus.

Si rursus distantia $A c c C C e e E$ &c. bisecari concipiantur, & inter binos quosque terminos, ad medias illas distantias inferi intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium series, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior. Terminorum vero differentia minores erunt; junctisque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur secundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum à se invicem distantias.

Quin in hac nova serie, distantia $A L A C$ &c. determinabunt terminorum ordines seu locos, nempe si sit $A L$ quintuplo major quam $A C$; sitque $C D$ quartus ab unitate seriei terminus: erit $L M$ istius seriei terminus vicesimus ab unitate.

Si sic continuo inter binos quosque terminos inferantur medii proportionales, fiet tandem numerus terminorum

rum seriei, sicut & laterum polygoni major quolibet dato numero seu infinitus; latera vero singula magnitudine diminuta fient quavis datâ rectâ lineâ minora; Adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea considerari potest, tanquam polygonum cujus latera sunt numero infinita, & magnitudine minima.

Curva sic descripta dicitur *Logarithmica*, in qua si numeri per rectas ad axem AN normaliter insistentes, represententur; portio Axis inter numerum quemlibet, & Unitatem intercepta, ostendit locum seu ordinem quem numerus ille obtinet in serie Geometrice proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem distantium. Verbi gratia, si AL sit quintuplo major quam AC , sintque ab unitate ad LM mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad CD ducenti termini ejusdem seriei, seu erit CD terminus seriei ducentessimus ab unitate; & quicumque supponatur numerus terminorum ab AB ad LM , erit istius numeri pars quinta numerus terminorum ab AB ad CD .

Curva Logarithmica potest etiam concipi duobus modis describi, quorum unus æquabilis est, alter vero in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. si recta AB super AN uniformiter incedat adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus æqualia spatia describat, interea tamen ita crescat AB , ut æqualibus etiam temporibus incrementa capiat, quæ sint toti lineæ crescenti proportionalia, hoc est si AB progrediendo in cd , augeatur parte sui od , & hinc æquali tempore quando in CD pervenerit, augeatur simili parte Dp , quæ sit ad dc ut incrementum do ad AB , similiter, dum æquali tempore ad ef pervenerit, crescat parte fq , quæ sit ad DC ut Dp ad dc seu ut do ad AB , id est, in æqualibus temporibus incrementa facta sint semper totis proportionalia.

Vel si linea AB regrediendo in contrariam partem, in constanti ratione minuat, ita ut, dum æqualia spatia AG GP pertransit, decrementsa patiat AB — $\Gamma \Delta$ $\Gamma \Delta$ — $\Pi \Sigma$ quæ sint ipsis AB $\Gamma \Delta$ proportionalia. Lineæ sic crescentis aut decrescents terminus Logarithmicam describet.

Nam cum sit $AB:do::dc:Dp::DC:fq$ erit componendo $AB:dc::dc:DC::DC:fe$ & ita deinceps.

Per hos duos motus, unum scil. æquabilem, alterum proportionaliter acceleratum aut retardatum, ipse *Neperus* Logarithmorum originem exposuit. Logarithmum sinus cujusque arcus vocavit, *Numerum qui quam proxime definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit.*

Ex hac Logarithmicæ descriptione constat, numeros omnes in æqualibus distantis, esse continue proportionales. Quin etiam patet, quod si sint quatuor numeri $AB\ CD\ IK\ LM$ tales, ut distantia inter primum & secundum sit æqualis distantiae inter tertium & quartum, qualiscunque sit distantia secundi à tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia distantiae $AC\ IL$ sunt æquales, erit AB ad incrementum D s; ut IK ad incrementum MT ; unde componendo $AB:DC::IK:ML$. Et vicissim, si quatuor numeri sint proportionales, erit distantia inter primum & secundum, æqualis distantiae inter tertium & quartum.

Distantia inter duos quoslibet numeros, dicitur Logarithmus rationis istorum numerorum, & metitur non quidem ipsam rationem, sed numerum terminorum in data serie Geometrice proportionalium progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum æqualium, quarum compositione efficitur numerorum ratio.

Si distantia inter duos quosvis numeros sit dupla distantiae inter alios duos numeros; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis posteriorum. Sit enim distantia IL inter numeros $IK\ LM$ dupla distantiae Ac quæ est inter numeros $AB\ cd$, bisecta IL in I ob $Ac=II=IL$, erit ratio IK ad lm æqualis rationi AB ad cd , adeoque ratio IK ad LM quæ est duplicata rationis IK ad lm , (per *defin.* 10. *El.* 5.) erit etiam duplicata rationis AB ad cd .

Similiter si distantia EL sit tripla distantiae AC ; erit Ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD . Nam ob distantiam triplam, triplo plures erunt proportionales
ab

ab EF ad LM quam sunt ejusdem rationis termini ab AB ad CD. at tam ratio EF ad LM, quam ratio AB ad CD, componitur ex rationibus æqualibus intermediis, (per 5. defin. El. 6.) Adeoque ratio EF ad LM ex triplo pluribus rationibus composita, Triplicata erit rationis AB ad CD. Similiter si sit GL distantia quadrupla distantiae AC, erit ratio GH ad LM Quadruplicata rationis AB ad CD. & ita deinceps.

Numeri cujullibet Logarithmus, est Logarithmus rationis Unitatis ad ipsum numerum, vel est distantia inter unitatem & illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, seu ordinem, quem quisque numerus obtinet ab unitate in serie Geometrice proportionalium. Verbi gratia si ab unitate ad numerum 10 sint proportionales numeri 10 000 000 hoc est si sit numerus 10 in loco 10 000 000^{mo}; per computationem invenietur, esse in eadem serie ab unitate usque ad 2 proportionales terminos numero 3 010 300, hoc est numerus binarius stabit in loco 3 010 300^{mo}. Similiter ab unitate usque ad 3, invenientur termini proportionales 4 771 213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 10 000 000, 3 010 300, 4 771 213. erunt Logarithmi numerorum 10, 2, & 3.

Si primus seriei terminus ab unitate dicatur y , erit secundus terminus y^2 , tertius y^3 , &c. cumque ponitur numerus denarius seriei terminus 10 100 000^{mus}, erit $y^{1000000} = 10$. Item erit $y^{3010300} = 2$. Item $y^{4771213} = 3$, & ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt potestates aliquæ illius numeri, qui est ab unitate primus. Et potestatum indices sunt numerorum Logarithmi.

Cum Logarithmi sint distantiae numerorum ab unitate, ut superius ostensum est. Erit Logarithmus ipsius unitatis 0, nam unitas non distat à seipsa. At fractionum Logarithmi sunt negativi seu infra nihil descendentes, hi enim in contrariam discedunt partem; adeoque si numeri ab unitate proportionaliter crescentes habeant Logarithmos positivos, seu signo + affectos, Numeri ab unitate

similiter decrecentes, seu fractiones habebunt Logarithmos negativos, seu signo — affectos. Quod verum est quando Logarithmi æstimantur per distantias numerorum ab unitate.

At si initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, sed ab unitate quæ est in loco aliquo fractionum

decimalium, verbi gratia à fractione $\frac{1}{1\ 00000\ 00000}$; tunc

omnes fractiones hac majores habebunt Logarithmos positivos, reliquæ minores, obtinebunt Logarithmos negativos, sed de hac re plura postea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus DC EF GH IK &c. distantia CE EG GI &c. sint æquales, erunt horum numerorum logarithmi AC AE AG AI &c. æquidifferentes, seu Logarithmorum differentia erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi sunt omnes in progressionem Arithmetica. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, viz. Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti, æquales servant differentias.

In prima quam *Neperus* edidit Logarithmorum specie, posuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate distare, quantum ipse terminus unitatem superabat. h. e. Si vz sit primus seriei terminus ab unitate AB, ejus Logarithmum seu distantiam Az vel By æqualem esse voluit ipsi vy , seu incremento numeri supra unitatem, ut si vy sit 1,0000001, ejus Logarithmum Az ponebat 0,0000001, & hinc computatione factâ Numerus Denarius seu 10 erit 23025850^{us} seriei terminus, qui itaque numerus est Logarithmus denarii in hac Logarithmorum forma, & exprimit ejus distantiam ab unitate in partibus quarum vy vel Az est una.

At hæc positio omnino arbitraria fuit, potest enim distantia primi termini, ad ipsius excessum supra unitatem, datam quamvis habere proportionem, & pro varia illa ratione, quæ pro arbitrio supponi potest, esse inter vy & By , incrementum primi termini supra unitatem & ejusdem

dem ab unitate distantiam, diversæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum speciem in aliam magis commodam postea mutavit *Neperus*, in qua posuit numerum denarium non esse 23025850^{mum} seriei terminum, sed terminum 10000000^{mum}, inque hac Logarithmorum forma, primum incrementum *vy* erit ad distantiam *By* vel *An*, ut unitas seu *AB* ad fractionem decimalem, 0, 4342994, quæ itaque exponet Longitudinem subtangentis *AT*. *In Fig. 4^a.*

Post mortem *Neperi*, vir summus Dominus *Henricus Briggsius*, immenso labore, Logarithmorum Tabulas ad hanc formam construxit & edidit. In hisce tabulis cum logarithmus denarii seu ejus distantia ab unitate ponatur 1, 000000, sintque 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. continue proportionales, erunt æquidistantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit 2, 000000. millenarii 3, 000000 & numeri 10000 Logarithmus fiet 4, 000000 & ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipere debent per 0, seu debet esse 0 in primo loco versus sinistram, sunt enim minores quam Logarithmus numeri 10 cujus initium est unitas; & Logarithmi numerorum inter 10 & 100 unitate incipiunt, sunt enim majores quam 1. 000000 & minores quam 2. 000000. Item Logarithmi numerorum inter 100 & 1000 binario incipiunt, sunt enim majores quam logarithmus numeri 100, quem incipit 2, & minores logarithmo numeri 1000 qui incipit per 3; eodem modo ostendetur in Logarithmis numerorum inter 1000 & 10000, primam figuram versus sinistram debere esse 3; & in Logarithmis numerorum ab 10000 usque ad 100000 prima versus sinistram figura erit 4, & ita deinceps.

Prima cujusque logarithmi figura versus sinistram dicitur characteristica seu index; quia ostendit altissimum seu remotissimum locum numeri à loco unitatum. v. gr. Si index logarithmi fit 1, numeri respondentis altissimus seu remotissimus versus sinistram ab unitate locus, erit
locus

locus decadum. Si index 2, remotissima numeri respondentis figura erit in secundo ab unitatum loco, hoc est erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altissimam numeri sui figuram esse in tertio ab unitatum loco, & inter millenarios locari.

Logarithmi numerorum omnium qui sunt in progressionem decupla aut subdecupla, caracteristicis seu indicibus suis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iidem scribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 170, 1700, 17000. nam cum sit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; distantiae inter 1 & 17, inter 10 & 170, inter 100 & 1700, inter 1000 & 17000 erunt omnes æquales, ideoque cum distantia inter 1 & 17 seu Logarithmus numeri 17 sit 1. 2304489 erit logarithmus numeri 170 = 2. 2304489, & Logarithmus numeri 1700 erit 3. 2304489 ob numeri 100 Logarithmum = 2. 0000000, & similiter ob numeri 1000 Logarithmum = 3. 0000000 Logarithmus numeri 17000 erit 4. 2304489.

Sic etiam numeri 6748. 674, 8. 67, 48. 6, 748. 0,6748, 0,06748. sunt continue proportionales scil. in ratione

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751
0,6748	—1,8291751
0,06748	—2,8291751

10 ad 1, eorum itaque à se invicem distantiae æquales erunt distantiae seu Logarithmo numeri 10, seu æquales 1, 0000000. quare cum Logarithmus numeri 6748 sit 3, 8291751, reliquorum logarithmi erunt ut in margine.

In duobus ultimis logarithmis, Indices tantum sunt negativi, reliquis figuris positivis manentibus, adeoque cum reliquæ figuræ addendæ sunt, subtrahendi erunt indices, & vice versa.

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmetica ubi numeri sunt integri, vel integri cum decimalibus adjunctis.

Quoniam in multiplicatione, unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis erit distantia inter multiplicandum & productum; si itaque numerus GH per numerum EF esset multiplicandus, distantia inter GH & productum debet esse æqualis distantia AE, seu Logarithmo multiplicatoris, si itaque capiatur GL æqualis AE, erit numerus LM productus, hoc est, si ad AG logarithmum multiplicandi addatur AE Logarithmus multiplicatoris, summa erit logarithmus producti.

In Divisione Unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum; adeoque distantia inter divisorem & unitatem æqualis erit distantia inter dividendum & quotum. Sic si LM per EF effet dividendus, erit distantia EA æqualis distantia inter LM & quotum, adeoque si capiatur LG æqualis EA, ad G erit quotus. Hoc est, si ab AL logarithmo Dividendi, auferatur GL seu AE Logarithmus divisoris, restabit AG Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmetica perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, eæ omnes facilius multo, & expeditius fiunt, per additionem aut subtractionem Logarithmorum.

Sit exempli gratia numerus 7589 multiplicandus per 6757 addendo Logarithmos ut in margine videre est, habetur Logarithmus producti, cujus index 7 monstrat esse in producto septem locos præter unitatum locum; & quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio

Log. 3. 8801846

Log. 3. 8297539

Log. 7. 7099385

venio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 & numerum producto majorem esse 51279000, quin capiendo differentias adjunctas, & partes proportionales; invenio notas ante-penultimam & penultimam esse 87, in ultimo autem seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63 adeoque verus productus erit 51278873. Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possunt ex tabulis ubi Logarithmi tantum constat 7 figurarum locis præter characteristicam, adeoque ubi opus est, Tabulæ *Ulacquianæ*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum; vel *Briggianæ*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

Si numerus 78596 dividendus sit
 Log. 4. 8954004 per 278, subtrahendo Logarithmum
 Log. 2. 4440448 divisoris ex Logarithmo dividendi
 Log. 2. 4513556 habetur Logarithmus quotientis, cui
 Logarithmo respondet, Numerus 282
 ,719 qui itaque erit quotiens.

Cum unitas, numerus quilibet assumptus, ejus quadratus, cubus, Biquadratus, &c. sint continue proportionales, eorum à seinvicem distantia æquales erunt. Manifestum itaque est Quadrati distantiam ab unitate, duplam esse distantia radice ab eadem: distantiam cubi triplam distantia radice suæ, Biquadrati distantiam esse distantia radice suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si duplicetur logarithmus numeri, dabitur logarithmus Quadrati; si Triplicetur, logarithmus cubi; si quadruplicetur, prodit Logarithmus Biquadrati. Et vice versa si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus Radicis quadratæ ejusdem numeri; Quin & ejusdem logarithmi tertia pars erit logarithmus Radicis Cubicæ; & pars quarta Logarithmus Radicis biquadraticæ, & ita deinceps.

Hinc Radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur Radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars dimidia

dia 0. 3494850, erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, seu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui respondet numerus 2, 23606 quam proxime.

CAPUT III.

De Arithmetica Logarithmorum, ubi numeri sunt Fractiones.

Vide Fig. 3.

QUotiescunque Fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Logarithmi partem, & subducendi alteram, expedit ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, sed ab unitate, quæ sit in decimo vel centesimo loco fractionum decimalium, v. gr. pone P O esse $\frac{1}{10000000000}$ & Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis distabit ab unitate versus sinistram, quam numerus 10 ab eadem distat versus dextram, sunt enim Decem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate usque ad P O.

Adeoque si A B sit unitas, ejus Logarithmus in hac suppositione non erit 0, sed erit $OA = 10.0000000$, Nam distantia denarii ab unitate est 1.0000000, unde distantia numeri 10 à P O erit 11.0000000. Item distantia numeri 100 à P O, seu ejus Logarithmus à P O incipiens, erit 12.000 0000 & numeri 1000 Logarithmus seu distantia à P O erit 13.000 0000; atque hac ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10. & Fractiones quarum indices fuerunt — 1, aut — 2, aut — 3 &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At si Logarithmi incipiunt à loco Fractionis cujus numerator est unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum est quoties fractiones occurrunt minores quam P O) illa Fractio centies plus distabit ab unitate quam 10 ab ea distat, adeoque Unitatis Logarithmus habebit Indicem 100. Numeri Denarii Logarithmus Indicem habebit 101. Et numeri centenarii Logarithmo

rithmo congruet Index 102, & ita deinceps Indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quæ sunt majores P O (à quo initium ducitur) Logarithmi erunt positivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. sunt in continua progressionem Geometrica, æqualiter à seinvicem distabunt, & eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; Adeoque cum Logarithmus denarii sit 11. 0000000, & unitatis Logarithmus sit 10. 0000000 erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10} = 9. 0000000$; & fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8, 0000000; & similiter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quin etiam eadem ratione si index Logarithmicus Unitatis sit 100 & denarii 101, Erit index Logarithmi Fractionis $\frac{1}{10}$, 99, & Fractionis $\frac{1}{100}$ Index Logarithmi erit 98; & Fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices ostendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura quæ cyphra non sit, ponenda fuerit. v. gr. Si index sit 4 ejus differentia ab indice unitatis quæ est 10 scil. 6 ostendit primam decimalis figuram significativam esse in 6^{to} ab unitate loco; ergo quinque cyphræ versus sinistram ei præponendæ sunt. Ita si Unitatis index sit 100 & fractionis index sit 80, erit prima ejus figura in vicesimo ab unitatis loco seu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam Fractio G H per fractionem D C multiplicanda. Quia unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis distantia inter multiplicandum & productum. Quare si capiatur G I = A C, ad I erit productus I K. Et proinde si ab O G Logarithmo multiplicandi, auferatur G I vel A C, restabit O I Logarithmus producti. Est vero A C = O A - O C, quæ ablata ab O G, relinquetur O G + O C - O A = O I, hoc est, si simul addantur Logarithmi multiplicatoris & multiplicandi, & è summa auferatur Logarithmus unitatis (qui semper scribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur logarithmus producti. ex. gr. Sit Fractio decimalis 0,00734 per fractionem 0,000876 multiplicanda, pono unitatis indicem Logarithmicum esse 100, & fractionum Logarithmi erunt

ut

ut in margine, qui additi, & rejecto Logarithmo Unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 ostendit primam producti figuram esse in sexto ab unitatum loco, quinque itaque cyphræ præponendæ sunt, & productus erit, 00000642984.

97, 8656961
96, 9425041
94, 8082002

In Divisione, Divisor est ad unitatem, ut dividendus ad quotum, & proinde distantia inter divisorem & unitatem, æqualis erit distantia inter dividendum & quotum. Itaque si fractio IK dividenda esset per DC, capienda erit IG = CA & locus quoti erit G. Est vero CA = OA - OC quæ ad OI addita fit OA + OI - OC = OG. hoc est si addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, & è summa auferatur Logarithmus divisoris, restabit logarithmus quotientis; sic si numerus CD per IK esset dividendus, capienda erit distantia CS = IA, & erit ST quotiens; cujus Logarithmus est OA + OC - OI. Sit CD = 0,347 IK = 0,00478.

ad logarithmum ipsius CD addatur Logarithmus Unitatis, hoc est ejus Indici præponatur 1 aut 10, & ex eo subducatur logarithmus divisoris, restabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monstrat quotientem esse inter numeros qui sunt à 10 ad 100. quæro itaque numerum logarithmo respondentem, quem invenio esse 72,594. Si fractionis vulgaris verbi gr. $\frac{7}{8}$ logarithmus desideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem est, ejus indici præponatur 1 aut 10 & subducatur ab eo logarithmus denominatoris 8, restabit logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis, 875.

19,5403295
7,6794279
11,8609016

10,8450980
0,9030900
9,9420080

Ut Fractionis cujuslibet DC potestates habeantur, Capiendæ sunt EC EG GI IL singulæ æquales AC, & EF erit quadratus, GH Cubus, IK biquadratus numeri DC, sunt enim ab unitate continue proportionales. Est præterea AE = 2 AC = 2 OA - 2 OC, unde OE = OA - AE = 2 OC - OA, hoc est logarithmus quadrati

drati est duplus logarithmi radice, minus Logarithmo unitatis. Similiter ob $AG = 3 AC = 3 OA - 3 OC$ erit $OG = OA - AG = 3 OC - 2 OA =$ Logarithmo cubi $=$ Triplo Logarithmi lateris minus duplo logarithmi unitatis. Eadem ratione, quia $AI = 4 AC = 4 OA - 4 OC$, erit $OI = 4 OC - 3 OA$; qui est Logarithmus Biquadrati. Et universaliter fractionis potestas sit n , logarithmus L , erit logarithmus potestatis $n = nL - nOA + OA$. hoc est multiplicando logarithmum fractionis per n , & è producto abjiciendo logarithmum unitatis multiplicatum per $n - 1$, habebitur logarithmus potestatis n ejusdem fractionis.

Ex. gr. sit Fractio $\frac{1}{20} = ,05$ cujus quærat potestas 6^{ta} ; hujus fractionis logarithmus est 8,6989700 qui multiplicatus per 6 dat numerum 52,1938200, & ex 52 ablatο numero 50 qui est index Logarithmi unitatis in 5 ductus, restabit logarithmus potestatis 6^{ta} scil. 2,1938200 cui respondet numerus 0 00 0000 15625. nam index 2 ostendit septem cyphas primæ figuræ præponendas esse.

Si Fractionis ,05 potestas octava desideretur, multiplicando logarithmum per 8, prodit 69,5917600, at cum ex numero 69 auferri non potest 70, qui est septies index logarithmi unitatis, quin in numeros negativos deveniatur, pono indicem logarithmi unitatis esse 100. & index logarithmicus fractionis, erit 98. hic logarithmus in 8 ductus dat 789,5917600 & ex numero 789 rejecto numero 700, qui utpote cum cyphis annexis, est septies logarithmus unitatis, restabit 89,5917600 logarithmus potestatis 8^{va} Fractionis $\frac{1}{20}$ cui congruens numerus est 00000 00000 39062, nam cum Index sit 89 & ejus differentia ab 100 est 11; figura prima fractionis significativa erit in undecimo ab unitatis loco, adeoque decem cyphæ præponendæ erunt.

Si in fractionibus, radices potestatum desiderentur. v. gr. Fractionis EF, quærat radix quadrata. Quoniam Radix est media proportionalis inter Fractionem & unitatem; bisectâ AE in C, erit CD radix quadrata fractionis

tionis EF. Est vero $AC = \frac{1}{2} AE = \frac{OA - OE}{2}$, Adeo-

que OC Logarithmus Radicis $= OA - AC = \frac{OA + OE}{2}$.

Si fractionis GH radix cubica quærat; Radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & GH, secetur itaque AG in tres partes æquales, quarum prima sit AC, erit CD radix quæsitæ, & quoni-

am est $AC = \frac{1}{3} AG = \frac{OA - OG}{3}$ si hæc subducatur ab

OA, restabit $\frac{2OA + OG}{3} = OC$ scil. Logarithmo Ra-

dicis cubicæ fractionis GH. Sic etiam fractionis IK radix biquadratica habetur, secando AI in quatuor partes æquales. Nam Radix est prima trium mediarum proportionalium inter unitatem & Fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4} AI$, & erit CD Radix biquadratica Fractionis

IK. Sed est $\frac{1}{4} AI = \frac{OA - OI}{4}$ adeoque $OC = OA -$

$AC = \frac{3OA + OI}{4}$.

Universaliter si fractionis LM desideretur radix potestatis n , ejus radice Logarithmus erit $\frac{nOA - OA + OL}{n}$,

hoc est si indici Logarithmico fractionis, præponatur numerus $n - 1$, & logarithmus sic auctus dividatur per n , quotus dabit Logarithmum radice quæsitæ. Sic si quærat radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ five .5 hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica desideratur, & fiet 29.6989700 cujus numeri triens est 9,8996566 æqualis Logarithmo radice cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congruens Logarithmo numerus est, 7937 qui erit radix quæsitæ.

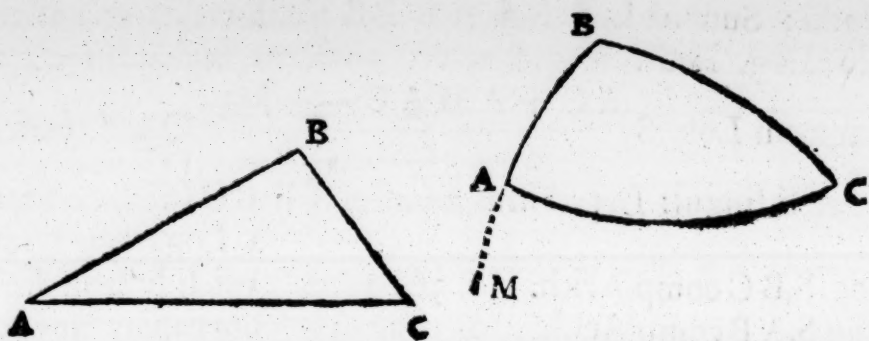
CAPUT IV.

De Regula Proportionis seu Aurea Logarithmica.

DAtis tribus numeris, qua ratione quartus proportionalis inveniendus sit, nos docet proportionis Regula; scil. termini secundus & tertius in se invicem ducendi sunt, & productus dividendus est per primum, qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæsitum. At per logarithmos minore labore habebitur ille quartus; Nam si è summa Logarithmorum secundi & tertii auferatur logarithmus primi, qui restat numerus est logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam & hic labor minui aliquantulum potest, si loco logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, seu differentia logarithmi à numero 10 000000 & obtinetur si pro singulis logarithmi figuris scribantur earum differentia à 9, Complementum hoc Arithmeticum cum reliquis duobus logarithmis in unam summam conjiciatur, & è summa, unitatis nota in primo versu sinistram loco sita abjiciatur, restabit logarithmus quarti termini quæsitum; atque hoc modo per unicam Numerorum trium additionem invenitur logarithmus termini quæsitum. Hujus rei causa hinc patebit. Sint tres numeri $A B C$ & è summa secundi & tertii subducendus primus, non tantum operatio communi modo perficitur sed etiam si assumatur numerus quivis E , & ab ea auferatur A , restabit $E - A$ si numeri $B C$ & $E - A$ in unam summam addantur, & è summa trium rejiciatur E , restabit $B + C - A$. sic si subducendus est

85 numerus 15 ex 23 capio numeri 15 complementum
23 ad 100 quod est 85, hunc numerum addo ad
108 & summa fit 108 ex quo sublato 100 restabit
8. sequuntur Exempla Trigonometrica Regulae proportionis per Logarithmos soluta.



Sit Triangulum A B C rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. 46'. angulus B 98 gr. 32'. & latus B C, 3478. & quæritur latus A C. Fiat (per *cas.* 1. Trigon. Planæ)

Sinus ang. A ad Sinum

ang. B ut B C ad A C. Et

quia Log. sinus anguli

A est primus analogiæ

terminus ejus vice sub-

stituto complementum A-

rithmeticum ejusdem, & addo Log. B C, Log. S, B & præ-

dictum complementum in unam summam, & è summa re-

jecta unitate quæ est in primo versus finistram loco, dabi-

tur Logarithmus lateris A C, cui congruens numerus est

5746, 309 æqualis A C lateri quæsito.

Arith. comp. S.A. 0.2228940

Log. Sin. B. 9.9951654

Log. B C 3.5413296

Log. A C. 43.7593890

Sit Triangulum Sphæricum A B C, in quo dantur omnia latera scil. B C = 30 grad. A B = 24 gr. 4'. & A C = 42 gr. 8'. quæritur angulus B. Producat B A ad M ut fit B M = B C erit A M differentia laterum B C B A æqualis 5 gr. 56'. (Per *cas.* LX in Triangulis obliquangulis Sphæricis.) Fiat ut rectangulum sub sinibus crurum A B B C ad quadratum Radii ita Rectangulum sub sinibus

Arcuum $\frac{AC + AM}{2} \frac{AC - AM}{2}$ ad quadratum sinus anguli $\frac{1}{2}$ B.

Est vero $\frac{AC + AM}{2} = 24 \text{ gr. } 2'.$ & $\frac{AC - AM}{2} = 18 \text{ gr. } 6'.$ Et quia primus analogiæ terminus est rectangulum sub

E

sub

sub finibus A B B C, & secundus terminus est quadratum Radii; Summa Log. Sin. A B B C subducenda erit ex duplo Log. Radii & qui restat numerus addendus est ad summam Log. S $\frac{AC + AM}{2} \frac{AC - AM}{2}$. Quod idem e-

rit ac si singuli Log. Sinus arcuum A B B C subducerentur à Logarith. Radii,

Log. S, B C comp. Arith. 0. 3010300

Log. S, A B comp. Arith. 0. 3895535

Log. S $\frac{AC + AM}{2}$ 9. 6098803

Log. S, $\frac{AC - AM}{2}$ 9. 4923083

2 Log. S, Ang. B. 19. 7927721

vel si horum finuum capiantur complementa Arithmetica, Atq; complementa illa & prædicti sinus in unam conjicerentur summam. Summa illa erit Logarithmus quadrati sinus dimidii anguli B.

Logarithmi itaque dimidium 9. 8963860 est Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}$ B = 51 gr. 58'. 31". & hujus anguli duplum erit 103 gr. 57'. 02" — angulo E qui erat in inveniendus.

C A P U T V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, Et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in serie Proportionalium, sive crescente, sive decrescente.

SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris S V V Y Y Q &c. æquales, & ad puncta S V Y Q &c. erigantur perpendiculares *Vide Fig. 3.* ST V X Y R Q Π &c. ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua incrementa X x Z z Π π erunt totis proportionalia. Nam ob S T : V X :: V X : Y Z :: Y Z : Q Π erit dividendo

videndo $ST : Xx :: VX : Zz :: YZ : \Pi\pi$, & componendo $VX : Xx :: YZ : Zz :: Q\Pi : \Pi\pi$. Hinc si Xx sit pars quælibet rectæ ST , erit Zz eadem pars rectæ VX , & $\Pi\pi$ quoque eadem pars rectæ YZ . ex. gr. Si Xx sit $\frac{1}{20} ST$, erit $Zz = \frac{1}{20} VX$, & $\Pi\pi = \frac{1}{20} YZ$; seu quod eodem redit, erit $VX = ST + \frac{1}{20} ST$. $YZ = VX + \frac{1}{20} VX$, item $Q\Pi = YZ + \frac{1}{20} YZ$.

Fiat ut ST ad VX , ita AB unitas ad NR ; erit $AN = SV$; adeoque rectæ $SV VY YQ$ &c. erunt singulæ æquales logarithmo ipsius RN , & AV Logarithmus termini VX erit æqualis $AS + AN =$ Logarithmo ipsius $ST +$ Logarithmo ipsius NR . Item AY Logarithmus termini YZ æqualis erit $AS + 2 AN =$ Log. $ST + 2$ Log. NR , & AQ logarithmus Termini $Q\Pi$ æqualis erit $AS + 3 AN =$ Log. $ST + 3$ Log. NR . Et universaliter si Logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujuscvis distantiam à termino primo, & productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini. At si series proportionalium sit decrescens; seu si termini in continua ratione minuantur, & $Q\Pi$ sit primus, habebitur Logarithmus alterius cujuscvis termini, multiplicando Logarithmum numeri NR per numerum qui exponit ejus termini distantiam à primo, & subducendo productum è Logarithmo primi. Quod si productus ille sit major Logarithmo primi termini initio ab unitate ducto; in eo casu ponendi sunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusâ, verbi gratia ab OP ita Logarithmus numeri $Q\Pi$ erit OQ .

Exponat jam LM quamvis pecuniam, seu pecuniæ summam à creditore Fœnori elocatam, ea lege ut singulis annis Usura annua sorti annumeretur, & finito primo anno, sit usura seu lucrum Kk , & IK aggregatum sortis & lucri pariat usuram Hb quæ sit ipsi IK proportionalis, seu in ratione constanti. Hæc usura Hb finito anno secundo, sorti accedat, & fors ea sit GH , quæ ad finem anni tertii pariat usuram Ff , ipsi GH proportionalem; Ponamus sortem singulis annis augeri parte sui vice-

fima, $\frac{1}{20}$, adeoque erit $IK = LM + \frac{1}{20} LM$, $GH = IK + \frac{1}{20} IK$. $EF = GH + \frac{1}{20} GH$, & ita deinceps. Erunt proinde termini $LM IK GH EF$ &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit LM semiobolus, Anglice *A farthing*. Ob LM ad IK ut 1 ad $1 + \frac{1}{20}$ vel ut 1 ad $1,05$. ut AB ad NR , erit $NR = 1,05$, cujus Logarithmus AN est 0.0211893 , vel magis accurate 0.0211892991 . Quæritur quantum lucri accedat semiobolo, qui sexcentis annis fœnori expositus est. Multiplicetur AN per 600 productus erit 12.7135794 . Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe $97,0177288$. (nam est semibolus pars libræ $\frac{1}{960}$) summa 109.7313082 erit Logarithmus numeri quæsitus, cumque index 102 superat indicem Unitatis novenario seu 9 , erunt in numero respondente novem figurarum loca supra locum Unitatum, & numerus ille in tabulis quæsitus invenietur major quam 5386500000 , & minor quam 5386600000 . Unus itaque semiobolus fœnori datus, finitis sexcentis Annis, pariet libras Anglicanas plures quam 5386500000 ; Cui summæ solvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipsa rerum origine ad hunc usque diem ex terrarum visceribus eruta est.

Exponat $Q\Pi$ quamvis pecuniæ summam quam post exactum integrum annum debitor creditori solvere tenetur, sed sine usurâ. Certum est si Debitor nunc totam solveret, illum amissurum jus quod habet in usuram annuam quæ ex pecunia illa prodiret; Quin & minor summa fœnori exposita, potest post annum cum sua usura, summam $Q\Pi$ adæquare. Minor illa pecuniæ summa, quæ cum sua Usura pecuniam $Q\Pi$ adæquat, præsens pecuniæ $Q\Pi$ valor dicitur. Sit AN Logarithmus Rationis quam fors habet ad aggregatum sortis & usuræ, hoc est, si fors sit Usuræ annuæ Vigecupla, sit AN Logarithmus numeri $1 + \frac{1}{20}$ seu $1,05$, & capiatur QY æqualis AN ; erit AY Logarithmus præsentis valoris pecuniæ $Q\Pi$. Patet enim pecuniam YZ fœnori expositam finito anno parituram pecuniam $Q\Pi$, adeoque ut habeatur logarithmus præsentis valoris,

valoris, seu YZ ; ex Logarithmo AQ detrahi debet Logarithmus AN , & restabit AY logarithmus præsentis valoris vel YZ . Si summa $Q\Pi$ non nisi post duos annos exactos debeatur; à logarithmo AQ subtrahendus est numerus $2AN$, & manebit AV logarithmus præsentis valoris, seu summæ quæ pro pecunia $Q\Pi$ solvi statim debeat. Nam manifestum est pecuniam VX fœnoris expositam, spatio duorum annorum, pecuniam $Q\Pi$ procreaturam. Eadem ratione, si summa $Q\Pi$ non nisi post tres annos debetur, à logarithmo $Q\Pi$ subtrahendus erit numerus $3AN$, & qui restat AS , erit logarithmus numeri ST , seu erit ST præfens valor summæ $Q\Pi$ post tres annos solvendæ. Et universaliter, si logarithmus AN multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis debetur summa $Q\Pi$, & productus numerus ex logarithmo AQ subducatur, hac ratione dabitur logarithmus numeri, qui erit præfens valor summæ $Q\Pi$. Hinc patet si 5386500000 libræ Angl. societati alicui finitis sexcentum annis solvendæ fuerint; tantæ pecuniæ præsentem valorem, vix unum semibolum adæquaturum.

Si in axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ HG EF , AB CD quæ sint proportionales, & extremitates ipsarum FH DB rectis jungantur, quæ productæ cum Axe conveniant in P & K , erunt rectæ GP AK semper æquales. Nam ob $GH:EF::AB:CD$. erit $GH:FS::AB:DR$. Sed ob æquiangula triangula PGH HSF , Item KAB BRD æquiangula erit $PG:HS::(GH:FS::AB:DR::)KA:BR$. Quarum proportionalium consequentes HS BR æquales sunt, Antecedentes igitur PG KA æquales erunt. Q.E.D.

Si rectæ CD EF ad AB GH æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B , & punctum F cum H , rectæ DBK FHP quæ prius secabant curvam, verentur in Tangentes BT , HV ; & rectæ AT GV semper sibi invicem æquales erunt, hoc est, portio Axis AT vel GV intercepta inter ordinatam & Tangentem quæ Subtangens dicitur, erit ubique constantis & datæ longitudinis quæ est præcipua Logarithmicæ Proprietas. Nam

in diversis logarithmicis, subtangentes curvarum species seu formas determinabunt.

In duabus diversæ speciei logarithmicis, ejusdem numeri logarithmi, seu distantiae ab unitate, erunt subtangentibus suarum curvarum proportionales. Sint enim curvæ HBD SNY , quarum subtangentes sint AT

Fig. 4. MX , sitque $AB = MN =$ unitati, item DC

Fig. 5. $= QY$; erit AC logarithmus numeri CD ,

in logarithmica HD , ad MQ logarithmum numeri QY ,

seu ejusdem CD in logarithmica SY , ut

subtangens AT ad subtangentem MX . Concipiatur inter-

ferri inter AB CD vel MN QY , infinitos terminos

continue proportionales, in ratione AB ad ab vel MN

ad mn ; & ob $AB = MN$ erit $ab = mn$. item erit bc

$= no$. Et termini proportionales cum in utraque figura

sint numero æquales, dividunt lineas AC MQ in partes

numero æquales, quarum primæ sint Aa Mm , partes ita-

que illæ erunt totis proportionales, hoc est erit $Aa :$

$Mm :: AC : MQ$. Quoniam autem triangula TAB

Bcb sunt similia (nam pars curvæ Bb coincidit fere cum

portione tangentis) item triangula XMN , No sunt si-

mililia. Erit Aa vel $Bc : bc :: TA : AB$

Item est no vel $bc : No :: MN$ vel $AB : MX$.

Unde erit ex æquo, $Bc : No :: TA : MX :: Aa : Mm ::$

$AC : MQ$. Q.E.D. Si AT vocetur a , ob $AB : AT ::$

$bc : Bc$; erit $Bc = \frac{a \times bc}{AB}$

Hinc si detur logarithmus numeri, qui sit unitati pro-

ximus, vel illam minimo excessu superat, dabitur loga-

rithmicæ subtangens, est enim excessus bc ad logarith-

mum Bc ut AB unitas ad subtangentem AT . Vel etiam

si sint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit

differentia numerorum ad differentiam logarithmorum, ut

alteruter numerorum ad subtangentem. v. gr. Si in-

crementum bc sit ,00000 00000 ,00001 02255 31945

60259, & Bc vel Aa logarithmus numeri ab sit ,00000

00000 00000 44408 92098 50062. duobus his nume-

ris & unitati inveniatur quartus proportionalis, scilicet

43429

43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem subtangentis AT, quæ est subtangens logarithmicæ quæ exhibet logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis temporis momentis, pars proportionalis usuræ annuæ forti annumeretur, ita scil. ut post finitum primum temporis momentum, seu exactam anni particulam indefinite exiguam, usuram poscat tempori proportionalem, quæ forti adjecta, unâ cum ipsa, usuram pariat, finito secundo temporis momento, forti pariter accessuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a usura annua Unitatis, seu unius libræ. & si integer, annus seu 1 dat usuram a , particula anni indefinite exigua Mm dabit usuram ipsi Mm proportionalem $Mm \times a$; & proinde si Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no = Mm \times a$. Per puncta Nn concipiatur logarithmica describi, cujus Axis est OMQ . In hac curva, si portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræsentabit quæ usque ad illud tempus, singulis momentis, proportionaliter crevit. Nam si capiantur ml &c. $= Mm$, ordinatæ lp &c. erunt in serie continue proportionalium in ratione MN ad mn , id est crescent eâdem ratione, qua pecunia crescit.

Tangat logarithmicam in N recta NX , ejus subtangens MX erit constans & invariabilis, & triangulum minimum Non simile erit triangulo XMN . At ostensum est, esse incrementum $no = Mm \times a = No \times a$ erit itaque $no : No :: No \times a : No :: a : 1$. Sed ut no ad No , ita erit NM ad MX . Quare erit, ut a ad 1, ita NM seu 1 ad $MX = \frac{1}{a}$ subtangenti.

Quod si Usura annua sit pars fortis vicesima, seu si sit $a = \frac{1}{20} = ,05$, erit $MX = \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diversis logarithmorum formis, ejusdem numeri logarithmi sunt subtangentibus suarum curvarum, pro-

in diversis logarithmicis, subtangentes curvarum species seu formas determinabunt.

In duabus diversæ speciei logarithmicis, ejusdem numeri logarithmi, seu distantiae ab unitate, erunt subtangentibus suarum curvarum proportionales. Sint enim curvæ HBD SNY , quarum subtangentes sint AT

Fig. 4. MX , sitque $AB = MN =$ unitati, item DC

Fig. 5. $= QY$; erit AC logarithmus numeri CD ,

in logarithmica HD , ad MQ logarithmum numeri QY ,

seu ejusdem CD in logarithmica SY , ut subtangens AT ad subtangentem MX . Concipiatur interferi inter AB CD vel MN QY , infinitos terminos continue proportionales, in ratione AB ad ab vel MN ad mn ; & ob $AB = MN$ erit $ab = mn$. item erit $bc = no$. Et termini proportionales cum in utraque figura sint numero æquales, dividunt lineas AC MQ in partes numero æquales, quarum primæ sint Aa Mm , partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc est erit $Aa : Mm :: AC : MQ$. Quoniam autem triangu-
la TAB Bcb sunt similia (nam pars curvæ Bb coincidet fere cum portione tangentis) item triangu-
la XMN , No sunt similia. Erit Aa vel $Bc : bc :: TA : AB$

Item est no vel $bc : No :: MN$ vel $AB : MX$.
Unde erit ex æquo, $Bc : No :: TA : MX :: Aa : Mm :: AC : MQ$. Q.E.D. Si AT vocetur a , ob $AB : AT :: bc : Bc$; erit $Bc = \frac{a \times bc}{AB}$

Hinc si detur logarithmus numeri, qui sit unitati proximus, vel illam minimo excessu superat, dabitur logarithmicæ subtangens, est enim excessus bc ad logarithmum Bc ut AB unitas ad subtangentem AT . Vel etiam si sint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam logarithmorum, ut alteruter numerorum ad subtangentem. v. gr. Si incrementum bc sit ,00000 00000 ,00001 02255 31945 60259, & Bc vel Aa logarithmus numeri ab sit ,00000 00000 00000 44408 92098 50062. duobus his numeris & unitati inveniatur quartus proportionalis, scilicet

43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem subtangentis AT, quæ est subtangens logarithmicæ quæ exhibet logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis temporis momentis, pars proportionalis usuræ annuæ forti annumeretur, ita scil. ut post finitum primum temporis momentum, seu exactam anni particulam indefinite exiguam, usuram poscat tempori proportionalem, quæ forti adjecta, unâ cum ipsa, usuram pariat, finito secundo temporis momento, forti pariter accessuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a usura annua Unitatis, seu unius libræ. & si integer annus seu 1 dat usuram a , particula anni indefinite exigua Mm dabit usuram ipsi Mm proportionalem $Mm \times a$; & proinde si Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no = Mm \times a$. Per puncta Nn concipiatur logarithmica describi, cujus Axis est OMQ . In hac curva, si portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræsentabit quæ usque ad illud tempus, singulis momentis, proportionaliter crevit. Nam si capiantur ml &c. $= Mm$, ordinatæ lp &c. erunt in serie continue proportionalium in ratione MN ad mn , id est crescent eâdem ratione, qua pecunia crescit.

Tangat logarithmicam in N recta NX , ejus subtangens MX erit constans & invariabilis, & triangulum minimum Noz simile erit triangulo XMN . At ostensum est, esse incrementum $no = Mm \times a = No \times a$ erit itaque $no : No :: No \times a : No :: a : 1$. Sed ut no ad No , ita erit NM ad MX . Quare erit, ut a ad 1, ita NM seu 1 ad $MX = \frac{1}{a}$ subtangenti.

Quod si Usura annua sit pars fortis vicesima, seu si sit $a = \frac{1}{20} = ,05$, erit $MX = \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diversis logarithmorum formis, ejusdem numeri logarithmi sunt subtangentibus suarum curvarum, pro-

proportionales: si MQ tempus Annum, seu unitatem, exponat; QY erit pecunia quæ finito anno debetur. Ut verò innotescat QY ; Fiat ut MX seu 20 ad 0,4342944 (qui numerus exponit subtangentem logarithmicæ, quæ exhibet logarithmos *Briggianos*) ita annus, five unitas, ad logarithmum *Briggianum*, qui numero QY congruit; logarithmus autem ille invenietur 0,0217147 cui respondens numerus = QY est 1,05127, cujus incrementum supra unitatem five sortem, 05127 pauxillum superat annum usuram, 05. Adeo ut si usura annua centum librarum sit quinque libræ, usura proportionalis singulis anni momentis forti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni, *lib. sel. d.*

$$5 : 2 : 6 \frac{1}{2}$$

Si quæraturs usura ejusmodi, ut singulis momentis pars ipsius forti continue crescenti proportionalis, ad sortem accedat ea lege ut finito anno producat incrementum quod sit fortis pars quælibet {data v. gr. vicesima. Fiat ut log. numeri 1,05 ad 1, hoc est ut 0,0211893 ad 1;

ita subtangens 0,4342944 ad $\frac{1}{a} = 20,49$, & erit $a = \frac{1}{20,49}$

= ,0488. Nam si concipiatur pars usuræ ,0481 momento respondens, hoc est eandem habens rationem ad ,0488 quam habet momentum ad annum, & fiat ut unitas ad illam usuræ partem, ita fors ad ejus incrementum momentaneum; quæ hac ratione continuè crescit pecunia, ad finem anni augebitur vicesima sui parte.

C A P U T VI.

De Methodo qua Henricus Briggs Logarithmos suos supputavit, ejusque Demonstratio. Vide Fig. 4.

QUamvis *Briggs* lineam Logarithmicam nusquam descripsit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique Rationem ex contemplatione Logarithmicæ

micæ evidentissime patebit. In qualibet Logarithmica HBD sint tres ordinatæ AB *abqs* quam proxime æquales, hoc est earum differentiæ exiguam admodum ad ipsas lineas habeant rationem; Erunt Logarithmorum differentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum lineæ sunt quam proxime æquales, propinquissime sibi invicem erunt, & pars curvæ Bs ab iis intercepta cum recta linea fere concidet, certe tam prope possunt ordinari sibi invicem admoventi, ut differentia curvæ, à recta ipsam subtendente, habeant ad ipsam subtensam, minorem quolibet datâ rationem. Triangula igitur Bc b Br s pro rectilineis assumi possunt, & erunt æquiangula. Quare est $sr:bc::Br:Bc::Aq:Aa$: hoc est excessus linearum supra minimam AB, erunt logarithmorum differentiis proportionales. Hinc patet ratio istius methodi qua tam numeri quam Logarithmi per differentias & partes proportionales corriguntur. Quod si AB sit unitas, erunt numerorum logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Si intra numeros denarium & unitatem capiatur medius proportionalis, seu quod idem est, numeri denarii extrahatur Radix quadratica, Radix illa seu numerus in medio erit loco intra denarium & Unitatem. & ejus Logarithmus erit dimidius Logarithmi qui denario competit ac proinde dabitur. Si inter numerum prius inventum & unitatem, iterum inveniatur medius proportionalis quod fit extrahendo numeri inventi Radicem quadraticam, hic numerus Unitati duplo vicinior erit quam prior, ejusque logarithmus erit prioris logarithmi semissis, seu Logarithmi denario competentis pars quarta. Si hac ratione continuo extrahatur Radix quadratica & bisecentur Logarithmi, pervenietur tandem ad numerum cujus distantia ab

unitate minor erit parte $\frac{1}{10000000000}$ istius lo-

garithmi qui Denario tribuitur. *Briggius* peractis 54 Radicum extractionibus; Invenit numerum 1,0000000000000000 12781 91493 20032 3442 ejusque logarithmum fore 0,0000000000000000 05551 11512 31257 82702. suppo-

supponatur Logarithmus hic æqualis Aq five Br , & fit qs numerus radicum extractione inventus; erit differentia rs qua unitatem superat = ,00000 00000 00000 12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus logarithmus inveniendus fit) & unitatem quærantur (ut superius ostensum est) medii proportionales, donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem superans ut unitas præcedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notæ significativæ sequantur. Sit numerus ille ab , & notæ significativæ, præfixis cyphris differentiam bc denotabunt. Deinde fiat ut differentia rs ad differentiam bc ita Br Logarithmus datus ad Bc vel Aa Logarithmum numeri ab ; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ sunt, tandem dabit Logarithmum numeri quæsitæ. Hac etiam ratione Inveniri possit Subtangens Logarithmicæ nempe si fiat $rs : Br :: AB$ seu unitas : AT subtangenti, quæ itaque invenietur 0,43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum logarithmi inno-

Fig. 5. telcent, nempe si detur numerus quivis NM ejusque Logarithmus & quærat alterius numeri logarithmus qui ad NM satis accedat, fiat ut NM ad subtangentem XM ita no differentia numerorum ad N o differentiam Logarithmorum. Quod si NM fit Unitas = AB dabuntur logarithmi multiplicando differentias minimas bc per subtangentem constantem AT .

Hac ratione Invenientur Logarithmi numerorum 2 3 & 7, & inde dabuntur Logarithmi numerorum 4 8 16 32 64 &c. 9 27 81 243 &c. item 7 49 343 &c. Si a logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus restabit logarithmus Quinari. & proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compositi, nempe 6 12 14 15 18 20 21 24 28 &c. facile logarithmis suis instruuntur, addendo logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum logarithmos, per tot Radicum

cum extractiones Invenire, molestum admodum & laboriosum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias Primas, Secundas, & Tertias &c. Logarithmos supputare. Quo itaque absque tanta molestia Numerorum logarithmi obtineantur, Magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Wallisius*, & nuper *Halleius* series infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius & certius logarithmi, ad quot volueris loca supputati haberi possunt; De hisce seriebus, eruditum Tractatum scripsit peritissimus Geometra *Halleius* inter Acta Philosophica Societatis Regiæ extantem, ubi series illas nova methodo demonstrat, modumque computandi logarithmos per eas docuit. Liceat hic subungere novam seriem, ex qua expedite & facile fluunt Logarithmi saltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, Numeri $z - 1$ & $z + 1$ erunt pares, & proinde dabuntur eorum logarithmi, & Logarithmorum differentia, quæ dicatur y ; Quin etiam datur Logarithmus numeri qui est medius Geometricus inter numeros $z - 1$ & $z + 1$ æqualis

scil. semisummæ logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3}$

$+ \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis logarithmo Rationis quam habet Geometricus medius inter numeros $z - 1$ & $z + 1$ ad Arithmeticum medium scil. numerum z .

Si Numerus superat 1000, Primus seriei terminus $\frac{y}{4z}$ sufficit ad producendum logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca, secundus terminus dabit logarithmi loca viginti. At si z major sit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, & hinc ejus usus optimus erit, in supplendis logarithmis Chiliadum à *Briggio* prætermisiss; Hujus rei capiamus exemplum, sit invenendus logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem est ac logarithmus

mus binarii præfixo Indice 4. & differentia Logarithmorum 20000 & 20002, idem est ac differentia Logarithmorum pro numeris 1000 & 10001, scil. 0,0000434272 7687. Hæc differentia si per 4 z seu 80004 dividatur

Quotiens $\frac{y}{4z}$ erit — — — 0,00000 00005 42813

Huic quoto addatur log. numeri Geometrici medii, summa

4,30105 17093 02416
4,30105 17098 45230

erit Logarithmus numeri 20001. Hinc patet, ut habeatur logarithmus ad quatuordecim loca non opus esse producere quotum ultra sex loca. At si logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut à *Vlacquo* in suis Tabulis factum est, duæ primæ quotientis notæ sufficiunt. Et si hac methodo computentur Logarithmi pro numeris supra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exscribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis quæ ab *Halleio* inventæ sunt, facile sequitur, qui autem plura de iis scire cupit, Præfatum Tractatum adeat & discat.



F I N I S.

Books Printed and Sold by Richard Clements Bookseller in Oxford.

1. A Preservative against Socinianism, shewing the direct and plain opposition between it and the Religion reveal'd by God in the Holy Scriptures. The first part, by Jonath. Edwards D. D. late Principal of Jesus Coll: Oxon. in 4to. Price 6 pence.
- 2 The Second Part, by the same Author. 4to. Price 1 Shill.
- 3 The Fourth Part, by the same Author. 4to. Price 1s. 6d.
- 4 An Index to the Four Parts of Dr. Edwards's Preservative against Socinianism. 4to. Price 4d.
- 5 Remarks upon a Book lately publish'd by Dr. William Sherlock Dean of St. Paul's &c. entituled A Modest Examination of the Oxford Decree, &c. by the same Author. 4to. price 6d.
- 6 M. Tullius Cicero de Officiis, ad Marcum f. ex MSS. recensuit Tho. Cockman e Coll. Univ. A. B. Editio secunda 8vo. Price 3s.
- 7 M. Fabii Quintiliani Declamationum Liber, cum ejusdem (ut nonnullis visum) dialogo de Causis Corruptæ Eloquentiæ, quæ omnia Notis illustrantur 8vo. Price 2s. 6d.
- 8 Xenophontis memorabilia Gr. Lat. cura Joannis Gilman. Price 4s. 6d.
- 9 Institutio Logicæ ad Communes Usus accommodata, per Joannem Wallis S. T. D. Geometriæ Professore Savilianum, Oxoniæ Editio Quarta. 8vo. Price 3s.
- 10 St. Athanasius's four Orations against the Arians, and his Oration against the Gentiles. Translated from the Original by Mr. Samuel Parker, in two volumes. 8vo. Price 8s.
- 11 Euclidis Elementorum Libri priores Sex, item Undecimus & Duodecimus. Ex Versione Latina Frederici Commandini, Quibus accedunt Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa: Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum. 8vo. Price 5s.
- 12 Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ. 8vo. separatim. Price 1s. 6d.
- 13 Antonii Walæi, S. T. P. Compendium Ethicæ Aristotelicæ ad normam Veritatis Christianæ revocatum. 8vo. Lond. 1708. Price 1s. 6d.
- 14 Aditus ad Logicam. In usum eorum qui primo Academiam saluant. Autore Samuele Smith, A. M. 12mo. Oxon. 1684. Price 1s.

- 15 Grammatica Rationis five Institutiones Logicæ. 12mo. Oxonii, è Theatro Sheldoniano. Price 2s.
- 16 Synopsis Metaphysica Andree Frommenii Editio ultima. Oxon. Price 2s. 6d.
- 17 Synopsis Communium Locorum, præcipuæ ad mores spectantium : ex poetis Latinis tum antiquioribus tum recentioribus collecta : & in capita cuique propria digesta. Editio tertia accuratius recognita & castigata. 12mo. Lond. 1719. Price 2s. 6d.
- 18 Græcæ Linguae Dialecti. In usum Scholæ Westmonasteriensis, opera ac studio Mich. Maittaire A. M. Ædis Christi apud Oxonienses Alumn. 8vo. Lond. 1706. Price 4s.
- 19 Theodosii Sphæricorum libri tres, Græce & Latine. Cura Jos. Hunt è Coll. Ball. 8vo. Oxon. Price 3s. 6d.
- 20 Rogeri Aschami Epistolarum libri quatuor. Accessit Joannis Sturmii Aliorumque ad Aschamum, Anglosque alios eruditos Epistolarum liber unus. Editio novissima prioribus auctior. 8vo. Oxon. 1703. Price 3s. 6d.
- 21 Poems on several occasions, by Mr. Smith of Magdalen Coll. 8vo. Lond. 1713. Price 2s. 6d.
- 22 The Works of Ben. Johnson in 6 volumes, adorn'd with Cutts. 8vo. Lond. 1716. Price 18s.
- 23 New Experiments and Observations touching Cold, or an Experimental History of Cold, begun : to which are added an Examen of Antiperistasis, and an Examen of Mr. Hobbs's Doctrine about Cold. By the Honourable Robert Boyle Esq; 4to. Lond. 1683. Price 4s.
- 24 Manuductio ad Logicam, five dialectica studiosæ juventuti ad Logicam præparandæ conscripta A: R. P. Philippo du Trieu è Societate Jesu. Cui annectitur Tractatus brevis & dilucidus de Demonstratione accessit insuper Cl. Gassendi elegans Dissertatiuncula de Natura Demonstrationis, Annotationibus quibusdam illustrata. 8vo. Oxon. 1678. Price 1s.
- 25 Globe Notes by R. Holland. 8vo. Oxford 1701. Price 4d.
- 26 Caspari Bartholini. Thom. F. Specimen Philosophiæ Naturalis, præcipua physices Capita exponens, in gratiam Juventutis Academicæ. Accedit de Fontium Fluviorumque Origine, ex pluviis Dissertatio Physica. 12mo. Oxon. 1713. Price 1s. 6d.
- 27 Apostolici : or, the History of the Lives, Acts, Death, and Martyrdoms of those who were Contemporary with, or Immediately Succeeded the Apostles, as also the most eminent of the Primitive Fathers for the First Three Hundred Years : to which is added a Chronology of the Three First Ages of the Church. By William Cave D.D. The Fourth Edition. Folio. Lond. 1716. Price 1l. 5s.

- 28 The Genuine Works of St. Cyprian, Arch-Bishop of Carthage, and Primate of all Africa; together with his Life written by his own deacon Pontius. All done into English, from the Oxford Edition; and illustrated with diverse Notes. By Nath. Marshal LL. B. Fol. Lond. 1717. Price 1*l.* 1*s.*
- 29 Bibliotheca Biblica: being A Commentary upon all the books of the Old and New Testament. 4to. to be Continu'd. The price of each Number 6*d.*
- 30 Dissertationes Medico-Physicæ. De Antris Lethiferis. De montis Vesuvii Incendio. De stupendo Ossium Coalitu. De Immani Hypogastrii Sarcommate, A. D. Bernardo Connor M. D. Serenissimi Poloniæ Regis Medico. E Regia Camera Parisiensis Societate. Oxonii, è Theatro. 8vo. 1695. Price 1*s.* 6.
- 31 Logice Artis Compendium. Authore Roberto Sandersono Episc. Lincoln. 8vo. Oxonii. Price 1*s.* 6*d.*
- 32 The English Grammar: or an Essay on the Art of Grammar, applied to and exemplified in the English Tongue. By Michael Maittaire. 8vo. Lond. 1712. Price 2*s.* 6*d.*
- 33 The History of Greece. Vol. I. Containing the Space of about 1660 years; from the first Plantation of Greece to the Peloponnesian War. By Thomas Hind, M. A. of Lincoln Coll. Oxford. 8vo. Lond. 1707. Price 3*s.* 6*d.*



9

α^{-2} α^{-1} 1

Fig. 2

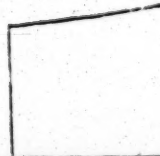


Fig. 1.

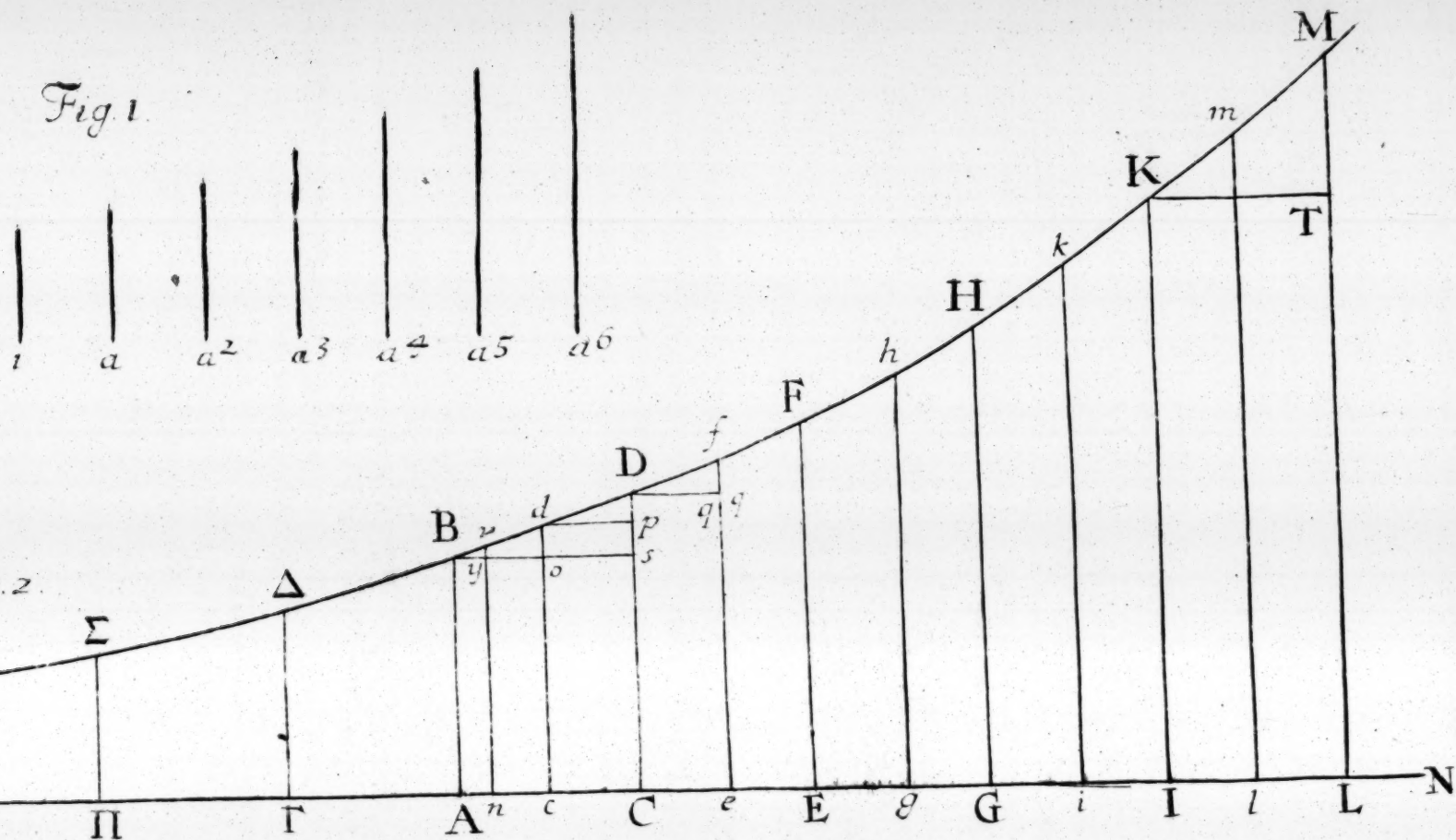


Fig. 2.

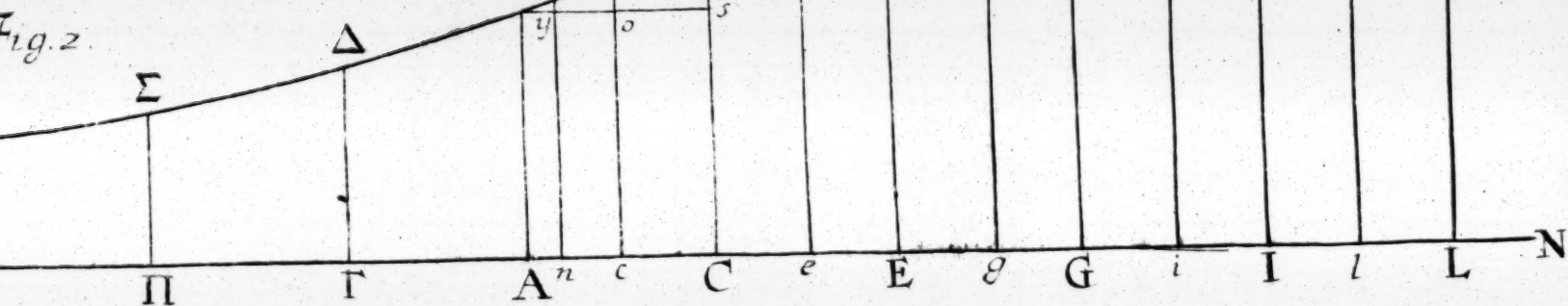


Fig. 3.

